

RAE

- 1. TIPO DE DOCUMENTO:** Trabajo de grado para optar por el título de INGENIERO DE SONIDO
- 2. TÍTULO:** ALGORITMOS APLICADOS DE SÍNTESIS POR MODELADO FÍSICO PARA INSTRUMENTOS DE CUERDA PULSADA.
- 3. AUTOR (ES):** Juan Pablo Riascos Melo
- 4. LUGAR:** Bogotá, D.C.
- 5. FECHA:** Julio de 2018
- 6. PALABRAS CLAVES:** Modelado físico, DPS, Algoritmos, Síntesis, Cuerdas.
- 7. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO:** Se realizó una recolección de información acerca de teoría acerca de síntesis por modelado físico y guía de onda para la implementación de tres diferentes algoritmos, los cuales, sintetizan el sonido de un instrumento de cuerda pulsada. Posteriormente, se hizo un análisis comparativo entre los métodos implementados y también con un instrumento real, que, en este caso, fue la guitarra clásica Yamaha C40.
- 8. LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:** Producción de audio
- 9. METODOLOGÍA:** Es de tipo explorativa, con un enfoque metodológico con base en el estudio y diseño
- 10. CONCLUSIONES:** Se logró encontrar el algoritmo que responde a la pregunta problema de encontrar el algoritmo que sintetice un instrumento de cuerda pulsada de la manera más fiel en como se comportaría el instrumento real encordado con un porcentaje muy bajo de error en cuanto a parámetros tales como decaimiento y distribución frecuencial.

Algoritmos aplicados de síntesis por modelado físico para instrumentos de cuerda pulsada

Juan Pablo Riascos M.

Universidad de San Buenaventura, sede Bogotá

Facultad de ingeniería

Programa de Ingeniería de Sonido

Bogotá, Colombia

2018

Algoritmos aplicados de síntesis por modelado físico para instrumentos de cuerda pulsada

Juan Pablo Riascos M.

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de ingeniero de sonido:

Título y nombre del director(a)
Felipe A. Vallejo Monsalve, Ph.D.

Línea de Investigación:
Diseño de sistemas de sonido

Universidad de San Buenaventura, sede Bogotá
Facultad de ingeniería
Programa de ingeniería de sonido
Bogotá, Colombia
2018

Agradecimientos

El presente trabajo va dedicado a mi familia, en especial a mi madre Maribel Melo Ibarra, a la cual le debo todo su esfuerzo en hacerme seguir mi felicidad por medio del conocimiento. Sin ella nada de esto sería posible y agradezco infinitamente el haber creído en mí.

De igual forma, agradezco a mi tutor del proyecto, el Dr. Felipe A. Vallejo Monsalve, quien siempre se mantuvo interesado con el desarrollo del trabajo y aportó con su amplio conocimiento en el tema.

Resumen

El proyecto consiste en la implementación de diversos algoritmos, basados en la síntesis por modelado físico, que emulan el sonido de instrumentos de cuerda pulsada, específicamente en este caso, guitarras clásicas. Estos algoritmos consisten en varios procesos aplicados, a través de filtros digitales y de sus respectivos parámetros.

Se implementaron tres algoritmos: Karplus-Strong, Karplus-Strong extendido y otro por guía de onda. Estos, parten del mismo principio, pero su comportamiento físico cambia dependiendo de las características y coeficientes de los filtros introducidos los cuales serán de vital importancia al representar características tales como: afinación, dinámica, reflexión, rigidez de cuerda, posicionamiento de pulsación y atenuamiento.

Posterior a esto, se realizó un análisis comparativo entre los distintos métodos y con un instrumento real, una guitarra acústica Yamaha C40, con encordado de nylon, para determinar si el comportamiento de los modelos funciona de acuerdo a la teoría y es compatible con el sonido producido por la guitarra. Para este análisis, fue necesario caracterizar la guitarra acústica tomando como parámetros importantes: Tensión de cuerdas, módulo de Young, longitud y diámetro de cuerda. Esto fue realizado para diseñar el filtro de rigidez que se explicará posteriormente el cual determinará la inarmonía del instrumento.

Se realizó un banco de sonidos, el cual se encuentra en la parte de anexos y se determinó los audios más relevantes de cada algoritmo y del instrumento real para verificar si con la ausencia de ciertos bloques en el modelo, hay cambios relevantes en el comportamiento físico del instrumento.

Palabras clave: Algoritmo, síntesis, modelado físico, cuerdas, DSP

Abstract

The project consists of the implementation of different algorithms, based on the synthesis by physical modeling, making an analysis throughout the process until reaching the final sound, which will emulate the sound of a plucked string instruments which depends of all the parameters introduced.

Three algorithms have been found: Karplus-Strong, Karplus-Strong extended and by waveguide, the components of the same principle, but their physical behavior changes the characteristics and the coefficients of the filters introduced. stories such as: tuning, dynamics, reflection, string rigidity, pulse positioning and attenuation.

After this, an analysis was made between the different filters and a real instrument, which in this case is an acoustic guitar. Yamaha C40, with nylon stringing, to determine if the behavior of the models works according to the design principle. For this analysis, it is necessary to characterize the acoustic guitar as important parameters: string tension, Young's modulus, string length and diameter. This was done to design the rigidity filter that was explained later which will determine the inharmony of the instrument.

A sound bank was made, which is in the part of the annexes and the most relevant audios of each algorithm and the real instrument were determined to verify if with the absence of the physical blocks in the model, there are relevant changes in the physical behavior of the instrument

Keywords: Algorithm, synthesis, physical modeling, plucked strings, DSP

Contenido

1. Problema de Investigación	11
1.1 Planteamiento del Problema.....	11
1.2 Objetivos de Investigación.....	12
1.2.1 Objetivo General	12
1.2.2 Objetivos Específicos.....	12
1.3 Justificación.....	12
2. Marco de Referencia.....	13
2.1 Antecedentes del Problema	13
2.2 Marco Conceptual	14
3. Diseño Metodológico	19
3.1 Tipo y enfoque de Investigación	19
3.2 Recopilación de datos	19
3.3 Instrumentos.....	20
4. Desarrollo Ingenieril	20
4.1 Recolección de información:.....	20
4.2 Algoritmo Karplus-Strong y Karplus-Strong Extendido.....	31
4.2.1 Karplus-Strong:.....	31
4.2.2 Karplus-Strong Extendido.....	35
5. Pruebas y resultados	60
5.1 Pruebas:.....	60
5.2 Resultados:.....	61
Referencias.....	85
6. Anexos	86

Lista de tablas

	Pág.
Figure 4-4-1 Cuerda en vibración ideal	21
Figure 4-2: Cuerda ideal con terminaciones rígidas con salida desplazada indicada en $X=\xi$. ¡Error! Marcador no definido.	
Figure 4-3: Circuito equivalente de simulación de velocidad de onda	27
Figure 4-4: Simulación discreta de cuerda con extremos rígidos con pérdidas resistivas distribuidas	28
Figure 4-5: Analogía mecánica de un sistema amortiguado	30
Figure 5-1: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, guitarra Yamaha C40	61
Figure 5-2: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo de Kps	62
Figure 5-3: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo de Kps extendido	62
Figure 5-4: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo por Guía de onda	63
Figure 5-5: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, guitarra Yamaha C40	67
Figure 5-6: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo de Kps	68
Figure 5-7: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo de Kps extendido	68
Figure 5-8: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo por guía de onda	69
Figure 5-9: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (Yamaha C40)	70
Figure 5-10: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (KPS)	70
Figure 5-11: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (KPS Extendido)	70
Figure 5-12: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (Guía de onda)	70
Figure 5-13: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (Yamaha C40)	72
Figure 5-14: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (KPS)	72
Figure 5-15: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (KPS Extendido)	72
Figure 5-16: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (Guía de onda)	72

Figure 5-17: Espectro de G3 a $x=0,7$ (Guitarra) (Guitarra).....	Figure 5-18: Espectro de G3 a $x=0.1$	73
Figure 5-19: Espectro de G3 a $x=0,7$ (KPS exten.) (KPS exten..).....	Figure 5-20: Espectro de G3 a $x=0,1$	74
Figure 5-21: Espectro de G3 a $x=0.7$ (Guía de onda) (Guía de onda).....	Figure 5-22: Espectro de G3 a $x=0.1$	74

Introducción

La síntesis de diversos instrumentos, ha facilitado la creación de múltiples piezas musicales debido a que no se requiere de un músico para poder incluir ciertos instrumentos a las mezclas. No obstante, estos instrumentos virtuales o VST, conllevan ciertos inconvenientes y limitaciones a la hora de representar el sonido natural del instrumento pues su contenido armónico es igual para todas las frecuencias, por lo que, a nivel perceptivo, estos pueden parecer poco reales. (Vesa y Mignot, 2014). Por ello, se ha tratado de solucionar este problema por medio de la síntesis por modelado físico, el cual, como su nombre lo indica, sintetiza un instrumento mediante ecuaciones que describen el comportamiento físico del instrumento, teniendo en cuenta los parámetros del mismo. (Smith III, 1993)

Los estudios sobre este campo son relativamente limitados puesto que es un tema que no lleva mucho tiempo de investigación. El señor Julius Smith III, quiso darle una solución a este problema y en el año 1993 sacó a la luz su publicación “Efficient Synthesis of stringed musical instruments”, con el cual dio un modelamiento matemático, a partir de la ecuación de onda y filtros DSP (procesamiento digital de señales), con lo cual, dio pie a las posteriores investigaciones sobre el tema.

1. Problema de Investigación

1.1 Planteamiento del Problema

El estudio de las cuerdas viene desde hace mucho tiempo atrás (300 a.C) con el estudio de Platon y la relación que hizo entre las longitudes de cuerdas y el sonido que generaban. A partir de esto, se han hecho estudios en este campo logrando encontrar las ecuaciones que describen el comportamiento de las cuerdas y los fenómenos físicos que están inmersos en el estudio.

En la actualidad, existen gran variedad de métodos funcionales que sirven para sintetizar cualquier tipo de instrumento, como se mencionó en la introducción de este documento. Uno de los métodos mayormente utilizados para la síntesis de instrumentos en dispositivos como sintetizadores o instrumentos virtuales es el Sampling. Este método, depende de la cantidad de muestras capturadas dependiendo de la posición y la intensidad de interpretación, sin embargo, son muestras ya establecidas y que no son posibles de modificar físicamente. El método por modelado físico, ofrece la posibilidad de manipular estos parámetros para llegar a un resultado deseado, el cual, se comportará teóricamente como lo haría el instrumento real.

La documentación del método por modelado físico, empezó en los años 70, por lo que hay documentación que se encuentra redactada a máquina de escribir y con notación que es un poco difícil de comprender. Eso resulta un problema ya que, al momento de recopilar los diferentes datos, se debe adaptar la notación y ciertos tipos de métodos que hoy en día son más eficientes.

Para los estudiantes que están inmersos en el mundo del audio, pueden encontrar una mayor comprensión en el DSP viéndolo desde el punto de vista físico donde, de una forma muy práctica, se puede evidenciar las repercusiones que tiene el modificar ciertos puntos en el modelo de cuerdas.

Los tres modelos utilizados, parten de la teoría de guía de onda, pero con diferentes estructuras internas, con lo que el sonido va a diferir de acuerdo a los procedimientos que tengan individualmente. Partiendo de esto, se pretende realizar un análisis de estos métodos para determinar cuál puede funcionar mejor en el proceso de recrear el sonido de un instrumento de cuerda pulsada.

De acuerdo a lo expuesto con el anterior planteamiento nuestra pregunta problema es:

¿Cuál es el algoritmo implementado que logra emular de forma más realista el sonido de un instrumento de cuerda pulsada por medio del método por modelado físico?

1.2 Objetivos de Investigación

1.2.1 Objetivo General

Implementar un algoritmo que emule el sonido, de una manera realista, de un instrumento de cuerda pulsada por medio del método de modelado físico

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar una recolección intensiva de información sobre síntesis por modelado físico y modelos de guías de onda
- Implementar algoritmos de síntesis de cuerdas tipo Karplus-Strong y algoritmos de Karplus-Strong extendidos.
- Implementar algoritmos por modelado físico de mayor complejidad que los de tipo Karplus-Strong.
- Realizar el análisis comparativo de la calidad del sonido generado por los distintos algoritmos implementados en el proyecto.

1.3 Justificación

El implementar y documentar este proceso, ayudaría a la realización de síntesis de otros instrumentos de cuerda pulsada, como instrumentos de percusión, instrumentos de viento con tubos de aire y cuerdas frotadas-percutidas, los cuales parten del mismo principio y que posteriormente podrían ser utilizados como VSTs o pluggins (Smith J. , 2010). La exploración en este tipo de síntesis puede ayudar a comprender mejor el funcionamiento de una guía de onda, el comportamiento frecuencial que tiene un instrumento encordado, tanto de forma física como su

respectiva representación digital, donde se modelan los diferentes fenómenos acústicos mediante la implementación de filtros digitales y modelos computacionales. Lo anterior puede ser de gran interés para los estudiantes de ingeniería o a las personas interesadas en el tema de procesamiento digital de señales con propósitos investigativos o interesados desde un punto de vista musical donde las opciones para encontrar diferentes timbres y sonidos se vuelven muy extensas puesto que el algoritmo está abierto a desarrollar nuevas técnicas que modelen casos y fenómenos muy específicos.

El trabajo de grado, apartando lo explicado anteriormente, va enfocado a la comprensión de este tipo de técnicas haciendo un “resumen” de toda la literatura encontrada y dejarla en una única notación que además sea de más fácil comprensión para el lector en dónde podrá ir viendo de forma práctica toda la teoría recopilada en la herramienta de software matemático Matlab.

Además de esto, es de gran ayuda tener toda esta documentación para el estudio de esta nueva síntesis en nuestra universidad, lo que podría llevar a posteriores resultados partiendo de la teoría dada.

2. Marco de Referencia

2.1 Antecedentes del Problema

Los estudios acerca del modelado físico, vienen a mediados de los años 70's (Hiller & Ruiz, 1971), cuando se estaban desarrollando tecnologías de procesamiento digital de señales para la compañía Texas Instruments en donde el ingeniero y profesor Kevin Karplus elaboró un algoritmo, a partir de la resolución de la ecuación de onda, el cual generaba la síntesis de instrumentos de percusión, viento y cuerdas por medio de modelos matemáticos. En 1978, el profesor Alex Strong, le realizó

una sencilla modificación al algoritmo con lo que quedó como un modelo sólido y funcional llamado el algoritmo Karplus Strong, que es el algoritmo más comúnmente utilizado en la síntesis por modelamiento físico (Smith J. , 2010).

Con el algoritmo Karplus Strong, fue posible seguir haciendo cierto tipo de modificaciones, con distintos tipos de filtro y distintos modelos matemáticos con lo que se fueron añadiendo diferentes tipos de fenómenos físicos en la síntesis del instrumento y poco a poco ir avanzando en su complejidad al mismo tiempo con el realismo de la técnica.

Más adelante, en 2001, el finlandés Vesa Välimäki, con la ayuda del equipo de investigación de la universidad de Cambridge, desarrolló un método que simulaba el sonido de un instrumento encordado tradicional finlandés, llamado Kantele, a partir de la teoría de Julius Smith, con resultados muy satisfactorios, aunque esto no se haya podido lograr la síntesis en tiempo real.

Posteriormente Yamaha firmó con la universidad de Stanford, donde trabajaba Julius Smith III, para continuar las investigaciones del modelado físico para que posteriormente en 1994 se comercializara el primer sintetizador basado en esta teoría (Yamaha VL1).

Estos primeros avances en el área del modelamiento físico, tuvieron sus limitaciones con respecto al motor de procesamiento de información (Karplus & Strong, 1983), puesto que, en su época, no se contaban con máquinas potentes que hicieran los cálculos en tiempos relativamente cortos. Algunos tipos de filtros implementados manejan ordenes muy grandes que años atrás hubieran sido muy difíciles de implementar digital o análogamente

2.2 Marco Conceptual

La síntesis de un instrumento, tiene como objetivo representar digitalmente el sonido de este por medio de diferentes métodos. Entre los más populares (Karplus & Strong, 1983) se encuentra la síntesis aditiva, que, por medio de sumas de ondas simples, logran representar una forma de onda compleja. La síntesis subtractiva, a partir de una nota fundamental, se genera la misma onda múltiples veces con osciladores, pero con diferentes amplitudes de nivel para así generar una representación tímbrica del instrumento analizado previamente en un analizador de espectro. Otra técnica utilizada es la síntesis granular, la cual se basa en el análisis de la cantidad de energía dada

en pequeñas “explosiones” encontradas en la envolvente, las cuales se distribuyen de forma sincrónica y asincrónica (Miranda, 2002).

Estos métodos funcionan bien para el tono del instrumento analizado, pero en el caso de ser utilizados como instrumentos virtuales, esta distribución armónica se extrapola para todo el rango de frecuencias, a diferencia de cómo actúa un instrumento encordado normalmente donde su comportamiento armónico cambia dependiendo de la posición o el tipo de excitación utilizada.

Para saber cómo actúa el instrumento debido a los parámetros físicos de este y de cómo y en donde se interprete, es posible utilizar el método de síntesis por modelado físico, el cual parte de la solución de la ecuación de onda basado en el modelo de guía de onda digital, propuesto por D'Alembert (D'Alembert, 1747). La teoría se basa en la descomposición de la onda en dos direcciones opuestas dirigidas hacia los límites de la cuerda. Por medio de filtros DSP (procesamiento digital de señales), tipo FIR, los cuales poseen una respuesta al impulso unitario finito y que, por sus características, no varía tanto en el tiempo. Como también filtros tipo IIR que tienen una respuesta infinita al impulso. Estos últimos no requieren de un orden tan alto para los filtros (Laakso, 1996).

Los parámetros físicos a considerar en el modelo de cuerdas son:

- Tensión, k
- Longitud, l
- Módulo de Young, E
- Diámetro, d

El módulo de Young E , es un parámetro inherente en todos los materiales elásticos y éste determina el comportamiento del material ante una fuerza externa en una dirección predeterminada. Los parámetros anteriores, son los que se tendrán en cuenta a partir del instrumento real, para el posterior diseño del modelo digital de instrumentos de cuerdas. (Hodgkinson, 2010)

Hay que tener presente, a la hora de muestrear la señal, del Teorema de Nyquist (M & Lee, 2006), el cual afirma que, para representar una onda periódica y continua en el tiempo a partir de las muestras obtenidas, es posible sin problemas solo si la frecuencia de muestreo utilizada es el dos veces su ancho de banda.

Cuando se habla de dominio digital, hay que tener presentes ciertos parámetros cruciales como lo son: muestreo, cuantificación y codificación, donde la frecuencia de muestreo determina el número de muestras tomadas por segundo, cuantificación es la resolución en donde la señal puede albergar sus datos de amplitud y codificación es la escala que estos valores pueden tomar. De estos parámetros, el único relevante para la síntesis es la frecuencia de muestreo, denotada F_s , puesto que, la frecuencia fundamental o la frecuencia de salida deseada f , varía de acuerdo a este (Jimenez, 2000). Además de ello, con la frecuencia de muestreo, se puede evitar los problemas referentes al teorema de Nyquist.

La frecuencia de muestreo será entonces cuantos valores de amplitud de la señal se tomarán a través del tiempo. Estos valores están equidistanciados solamente por comodidad matemática.

Al estar manejando muestras en lugar de valores continuos, se puede llegar a que un valor no sea entero (que es lo que pasará en la gran mayoría de casos) con lo que el valor no entero deberá cambiarse por el valor “existente” más cercano. Este tipo de rejilla se ve modificada con la cuantificación puesto a que cuanto más resolución se le dé (ya sea de 8 bits, 16 bits, 24 bits...) se tendrán valores más aproximados a la del valor original. El valor que representan puede definirlo o no el usuario y está libre a su asignación. A lo anterior es lo llamado codificación (Jimenez, 2000).

Como se mencionó anteriormente, durante todo el proceso de desarrollo del algoritmo, se implementarán diferentes tipos de filtros. Un filtro se considera como un elemento que rechaza o no ciertas características deseadas (M & Lee, 2006). En este caso, un filtro digital, es un sistema que modificará la señal de entrada por un modelo matemático que usualmente es la Transformada de Fourier, teniendo así, una salida de señal de acuerdo a las características del filtro como pueden ser:

1. Rango o región de espectro donde el filtro va a atenuar o a dejar pasar como:

Filtro pasa alto, filtro pasa bajo, filtro pasa banda.

2. Su orden:

Primer orden, segundo orden, orden superior.

3. Su respuesta a una entrada unitaria:

*FIR (Finite impulse response), IIR (Infinite impulse response), THIR (Truncated infinite impulse response).

4. Su estructura:

Varios en cascada, varios en paralelo.

Los filtros pueden ser representados de diferentes formas, en dominios diferentes. Se pueden representar en función de la frecuencia angular ω , en función de sus muestras discretas n y en función de la variable Z .

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=0}^M a_k \cdot y(n-k) \quad (2.1)$$

Y en función de Z , en forma de fraccionario:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad (2.2)$$

Como se puede observar en la ecuación 2.2, se puede apreciar el por qué los delays en un sistema se representan con la letra Z elevado a un valor negativo que es la cantidad de retraso en samples.

A diferencia de sistemas continuos en el tiempo, en los cuales su análisis generalmente se realiza con la transformada de Laplace, en tiempo discreto este análisis se realiza mediante la transformada Z (Moya, 2011). La transformada z de una señal x[n] que va desde $-\infty$ a ∞ , está definida como una serie de potencias:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad (2.3)$$

Donde X(n) representa la transformada Z de x(n). Esta variable z es una variable compleja que puede ser representada de forma polar así:

$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

Donde r es el radio o amplitud de z y θ es su ángulo. Cuando $r=1$, $|z|=1$ es llamado el círculo unitario del plano z. Dado que la transformada z involucra series de potencia infinitas, esta solo existe para los valores de z donde las series de potencia converjan (Moya, 2011). La región en el plano z donde las series de potencia convergen se llama región de convergencia.

Los algoritmos a implementar, abarcan subsistemas los cuales son invariantes en el tiempo. Un sistema puede definirse como un conjunto de subsistemas que logran transformar la señal de entrada en otra (ya sea análoga o digital), dependiendo de los requerimientos que se deseen.

Para poder caracterizar un filtro en el dominio temporal es necesario ver cómo reacciona este ante un impulso, lo cual es llamado la respuesta impulsional (Gutiérrez, 2009).

3. Diseño Metodológico

3.1 Tipo y enfoque de Investigación

Este proyecto, toma como base el tipo de investigación explorativa. Se pretende reunir toda la información posible y plasmarla en una síntesis donde se pueda apreciar paso a paso el método usado para su mayor comprensión en el tema.

Para lo anterior, como ya se mencionó, primero se recolectará toda la información pertinente acerca de la síntesis por modelado físico para instrumentos de cuerda pulsada y guía de onda en general, filtrando todo aquello que no sea relevante para la realización de algoritmos de cuerda pulsada. Posteriormente a esto, se implementarán los algoritmos de acuerdo a la teoría recolectada explicando así todo el proceso.

Paralelo a la implementación de los algoritmos, se realizarán las grabaciones del instrumento real, que en este caso es una guitarra acústica Yamaha C40 con encordado de nylon y con ello generar una base de datos donde posteriormente hará el análisis y comparación con el instrumento real.

Como el objetivo del proyecto no es sintetizar la guitarra utilizada, las muestras tomadas por el instrumento real, solo servirán de guía para conocer el comportamiento real de la guitarra en términos de tiempo de decaimiento por frecuencia y en su distribución armónica.

Por último, se tomarán los diferentes métodos implementados y se compararán en un análisis frecuencial para poder determinar si efectivamente los algoritmos están cumpliendo con el objetivo de simular digitalmente un sistema de cuerda en vibración.

3.2 Recopilación de datos

Para obtener información referente al tema del proyecto, se hará uso de documentos tales como artículos científicos y libros que puedan ser de ayuda referenciando los autores en el proceso.

Para el primer objetivo específico, se tendrán en cuenta la mayor cantidad de parámetros utilizados en el método de síntesis por modelado físico, pero se omitirá la información que no sea relevante al momento del diseño de los algoritmos.

3.3 Instrumentos

Los instrumentos necesarios para la realización de este proyecto, para la recolección de datos del instrumento real son:

- Portátil Asus
- Micrófono Sm58
- Software Audacity
- Dinamómetro (2N)
- Cinta métrica

4. Desarrollo Ingenieril

4.1 Recolección de información:

Los métodos basados en el modelado físico para la obtención de la síntesis de un instrumento con características particulares, se basan en la resolución de la ecuación de onda (Julius O. Smith, 1983). Los más recientes desarrollos de las guías de onda digitales, implementan diferentes caminos para el modelado físico. Primero, la ecuación de onda se resuelva de forma general para obtener ondas viajeras en el interior del medio, en este caso, las cuerdas. Las ondas viajeras son explícitamente simuladas en el modelo de guía de onda en contraste con lo calculado de una variable física (las ondas viajeras deben ser sumadas para producir una salida física) (Karplus & Strong, 1983).

En el caso ideal, sin pérdidas, una onda que viaja entre dos puntos en el medio puede ser simulada simplemente con una línea de delay digital. En un caso no ideal, en caso lineal general, en el cual la frecuencia depende de las pérdidas y de dispersión, la conmutatividad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, permiten que las pérdidas y dispersiones sean agrupadas en puntos discretos tales que la mayor parte de la simulación todavía está libre de múltiples líneas de delay.

Para comenzar con el diseño del modelo digital de cuerdas en vibración, como se ha mencionado anteriormente, es necesario resolver la ecuación de onda en una dimensión. Cuando se habla de un modelo ideal, una vez más retomamos el hecho de que la cuerda oscilante no tiene pérdidas, es lineal y flexible y es dada por

$$Ky'' = \epsilon \ddot{y} \quad (4.1.1)$$

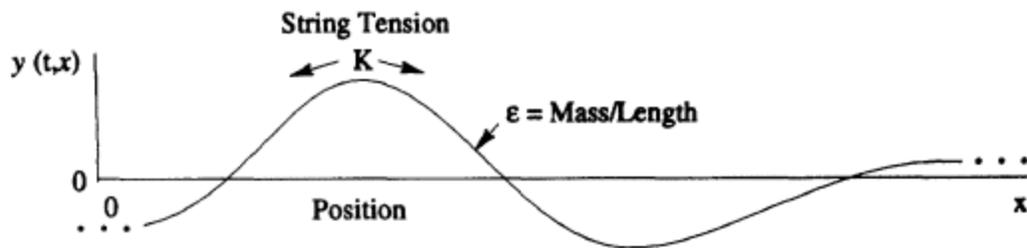
Donde

$$k = \text{Tensión de cuerda} \quad y = y(t, x)$$

$$\epsilon = \text{Densidad de masa} \quad \dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} y(t, x)$$

$$y = \text{Desplazamiento de cuerda} \quad y' = \frac{\partial}{\partial x} y(t, x)$$

Figure 4-4-1: Cuerda en vibración ideal



La ecuación de onda, fue derivada por Morse en 1936 (Morse, 1936) y esta se encuentra en la mayor parte de libros de acústica. Esta ecuación, surge de la ley de Newton pero en una escala microscópica. Además de las ondas transversales en la cuerda, hay que tener presente la fuerza de restauración, por unidad de longitud, que es dada por la tensión multiplicada por la deformación de la cuerda (Ky''); la fuerza de restauración está balanceada todo el tiempo gracias a la fuerza inercial por unidad de longitud de la cuerda. Esta misma ecuación de onda puede ser aplicada para cualquier medio elástico que esté dispuesto a lo largo de una dimensión.

Se puede comprobar que la ecuación de onda se puede resolver para cualquier forma de cuerda la cual viaja de izquierda a derecha con una velocidad de: $c = \sqrt{\frac{K}{\epsilon}}$. Para ello, la notación correspondiente de acuerdo a la dirección de propagación será de la siguiente manera (Karplus & Strong, 1983): las ondas que van de izquierda a derecha, su ecuación correspondiente es $y_r(x - ct)$ y para las que van de derecha a izquierda $y_l(x + ct)$ donde y_r y y_l son dos funciones diferenciales arbitrarias. Luego, la clase general de soluciones a la ecuación de onda, de segundo orden, sin pérdida y en una dimensión, puede expresarse como:

$$y(x, t) = y_r(x - ct) + y_l(x + ct) \quad (4.1.2.1)$$

O también expresada como

$$y(t, x) = y_r\left(t - \frac{x}{c}\right) + y_l\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (4.1.2.2)$$

Para llevar la solución de la onda viajera al dominio digital, es necesario muestrear las amplitudes, lo que significa tomar cierta cantidad de muestras de amplitud en el tiempo, en este caso, periódicas en el tiempo para facilitar los cálculos matemáticos. Al ser ahora muestras en lugar de una señal continua en el tiempo, se dice que ahora el sistema funciona en el dominio discreto y ya no en el continuo. Si se llegase a requerir identificar una muestra decimal (muestreo fraccional) se

necesitará hacer interpolaciones que es llevar estos valores intermedios a un entero coherente (Moya, 2011).

Formalmente, el muestreo es llevado a cabo por el cambio de variables de la forma (Smith J. , 2010):

$$x \rightarrow x_m = mX$$

$$t \rightarrow t_n = nT$$

Donde T es el intervalo del muestreo y X el intervalo espacial en metros.

Sustituyendo en la solución de onda para la onda viajera de la ecuación 4.1.2.2, equivale a:

$$y(t_n, x_m) = y_t \left(t_n - \frac{x_m}{c} \right) + y_l \left(t_n + \frac{x_m}{c} \right)$$

$$y(t_n, x_m) = y_t \left(nT - \frac{mX}{c} \right) + y_l \left(nT + \frac{mX}{c} \right)$$

$$y(t_n, x_m) = y_t[(n - m)T] + y_l[(n + m)T] \quad (4.1.3)$$

Ya que T multiplica a todos los argumentos, si se cumple que $C = X/T$, se puede suprimir por definición:

$$y^+(n) = y_t(nT), \quad y^-(n) = y_l(nT) \quad (4.1.4)$$

Esta nueva notación, con signo más en el exponente, muestra hacia donde se está propagando la onda viajera, siendo el más hacia la derecha y el menos hacia la izquierda.

El término $y_t[(n - m)T] = y^+(n) = y_t(nT)$ de la ecuación 4.1.4, puede ser pensado como la señal de m-muestras de líneas de delay las cuales su salida es $y^+(n)$. En general, sustrayendo un m número positivo de un argumento de tiempo n, corresponde a retrasar la forma de onda m muestras. Ya que y^+ es el componente que va hacia la derecha, se escribe esta línea de delay con entrada $y^+(n)$ a la izquierda y como salida $y^+(n - m)$ a la derecha. De la misma forma, el termino $y_l[(n + m)T] = y^-(n + m)$ puede ser pensado como la entrada de una m muestra de línea de delay cuya salida es $y^-(n)$. Adicionando m al argumento de tiempo n, produce una m muestra de avance de la forma de onda.

Ya que y^- es el componente con dirección hacia la izquierda, tiene sentido colocar la línea de delay con entrada $y^-(n + m)$, a la derecha y $y^-(n)$ como salida a la izquierda. Al final, las ondas viajeras en ambas direcciones, deben ser sumadas para así llegar a una salida física acorde a la ecuación:

$$y(t_n, x_m) = y^+(n - m) + y^-(n + m) \quad (4.1.5)$$

Con esto, se podrá calcular el desplazamiento físico de la cuerda en cualquier punto en el espacio muestreado x_m , simplemente agregando los bloques superior e inferior juntos en la posición m a lo largo del par de líneas de delay.

Cualquier guía de onda ideal y en una dimensión, puede ser simulada en este método (Karplus & Strong, 1983). Es importante señalar que la simulación es exacta a los instantes de muestreo siempre y cuando las ondas que viajan a lo largo de la cadena estén inicialmente limitadas a menos de la mitad de la frecuencia de muestreo, por el teorema de Nyquist. En otras palabras, las frecuencias más altas presentes en las señales $y_r(t)$ y $y_l(t)$ no deben exceder la mitad de la frecuencia de muestreo temporal $f_s = 1/T$, equivalentemente, las mas altas frecuencias espaciales en la forma $y_r(x/c)$ y $y_l(x/c)$ no deben excederla mitad de la frecuencia de muestreo espacial $V_s = 1/X$ (Smith K. V., 1993).

En dominio discreto, integrales y diferenciales pueden ser desarrolladas usando filtros digitales. Estas aproximaciones de primer orden, son fieles a bajas frecuencias relativamente a la mitad de la tasa de muestreo pero de todas maneras, no son las mejores aproximaciones con relación a las integrales y diferenciales realizadas en tiempo continuo (M & Lee, 2006). Se pueden lograr mejores aproximaciones usando filtros digitales con un orden más alto. En principio, un diferencial digital es un filtro cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega T})$ óptimamente se aproxima a $j\omega$ con ω entre $-\pi T$ y πT . Similarmente, un integrador digital debe igualar $1/j\omega$ a lo largo del círculo unitario en el plano z .

En un punto arbitrario x , a lo largo de la cuerda, la fuerza vertical aplicada en un tiempo t a la parte de la cuerda a la derecha de la posición x por la parte de la cuerda a la derecha de la posición x es dada por:

$$f_l(t, x) = K \sin(\varnothing) \approx K \tan(\varnothing) = Ky'(t, x) \quad (4.1.6)$$

Asumiendo que $[y'(t,x) \ll 1]$ como también la derivación de la ecuación de onda. Similarmente, la fuerza aplicada por la parte de la izquierda como la de la derecha es dada por:

$$f_r(t, x) = -K \sin(\varnothing) \approx -Ky'(t, x) \quad (4.1.7)$$

Las fuerzas deberían cancelarse ya que una fuerza neta que no sea cero en un punto sin masa debería producir una aceleración infinita (Karplus & Strong, 1983).

Las ondas de fuerza verticales se propagan a lo largo de la cuerda como cualquier otra variable de onda transversa (ya que ellas son solo ondas de inclinación multiplicadas por la tensión K). Así pues, es posible elegir cualquier dirección correspondiente a la fuerza, sea f_l o f_r como la variable de fuerza de la cuerda, siendo una la negativa de la otra. Para obtener la unificación de las cuerdas vibrantes y las columnas de aire, se tiene que elegir f_r , la que actúa hacia la derecha

En un modelo computacional, en el caso de la guitarra que presenta extremos rígidos, el modelo de guía de onda digital se convierte en un ciclo de línea de delay, al contrario que cuando se analiza el modelo de la cuerda vibrante ideal con un tamaño infinito donde se considera solo una simple línea

de delay bidireccional (Julius O. Smith, 1983). Estos extremos hacen que el modelo tenga condiciones de contorno, es decir, que irá desde una posición de $x=0$ a $x=L$, que es el final de la longitud.

Se puede denotar el tiempo, en muestras, de propagación de un extremo al otro, ida y vuelta, o el total del ciclo del delay en la cuerda mediante: $N = \frac{2L}{x}$.

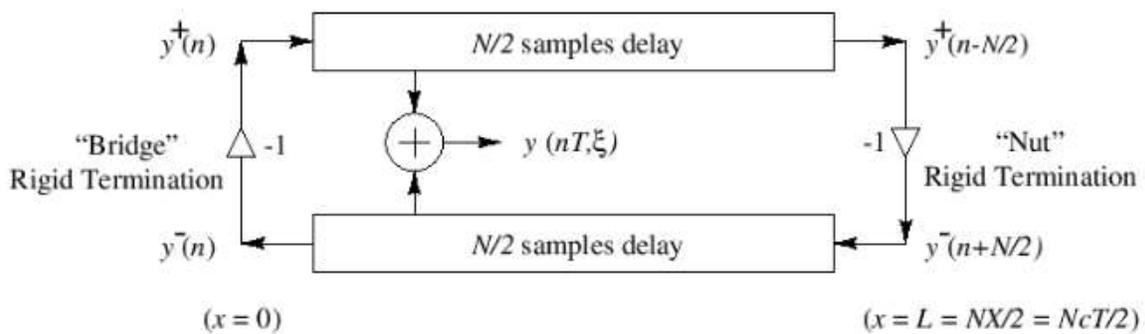
Aplicando esto a la onda viajera, se tiene que:

$$y(nT, 0) = y^+(n) + y^-(n) = 0 \quad (4.1.8)$$

$$y\left(nT, \frac{NX}{2}\right) = y^+\left(n - \frac{N}{2}\right) + y^-\left(n + \frac{N}{2}\right) = 0 \quad (4.1.9)$$

Una simulación digital del diagrama la cuerda ideal con extremos fijos se muestra a continuación (Smith J. , Physical Modeling Using Digital Waveguides, 1992):

Figure 4-2: Cuerda ideal con terminaciones rígidas con salida desplazada indicada en $X=f$



Fuente: Physical audio signal processing. (Smith J. , 2010)

Al igual que el desplazamiento es siempre cero en los extremos rígidos, la velocidad también es cero en esos instantes:

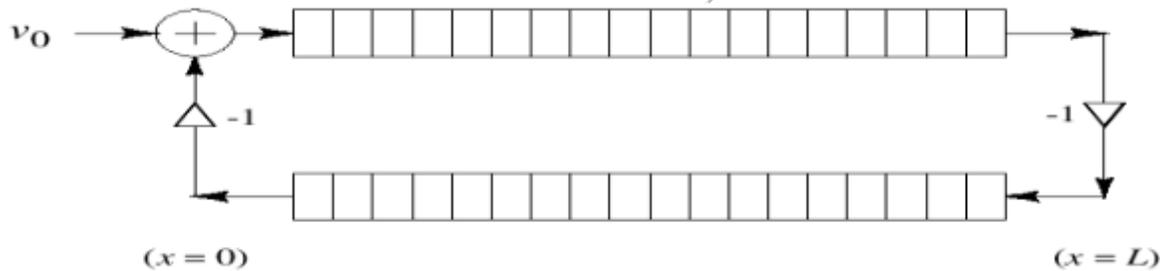
$$v(t, 0) = 0 \quad v(t, L) = 0 \quad (4.1.10)$$

Por lo tanto, al igual que en el desplazamiento de las ondas, la velocidad de las ondas reflejadas de los extremos rígidos es:

$$v^+(n) = -v^-(n) \quad (4.1.11)$$

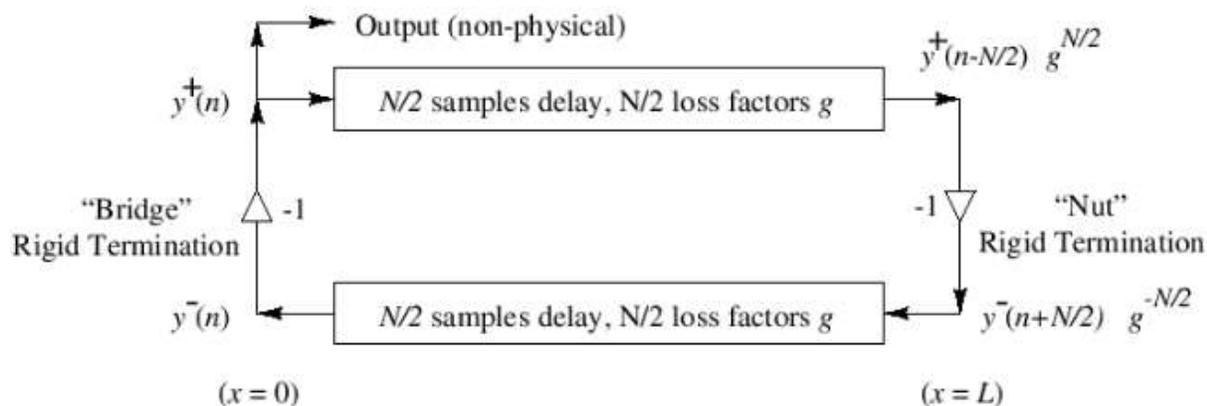
$$v^+(n + N/2) = -v^-(n - N/2) \quad (4.1.11)$$

Figure 4-3: Circuito equivalente de simulación de velocidad de onda



Es importante hablar sobre el término “*damping*”, o atenuamiento, que, en este caso, se aplica para las cuerdas pulsadas. Sin el *damping* la cuerda ideal tendría un sonido poco fiel al instrumento real, pues el sonido será perfectamente periódico y nunca decaería. La transformada de Fourier discreta del contenido inicial del ciclo de la cuerda da los coeficientes de la serie de Fourier de los tonos periódicos producidos.

Figure 4-4: Simulación discreta de cuerda con extremos rígidos con pérdidas resistivas distribuidas



Fuente: Digital synthesis of plucked strings and drum timbres (Karplus & Strong, 1983)

En el diagrama anterior, se tomó la salida de una forma simple pasando por un elemento de delay particular en lugar de una suma realista de elementos opuesta en la línea de delay bidireccional. Posteriormente, en el objetivo específico 3, se podrá entender mejor la ruta de la onda viajera desde su entrada hasta su salida física por medio de la fuerza ejercida en el puente.

Además de los extremos rígidos que se revisaron anteriormente, cuando se habla de guitarra acústica, se habla de los extremos flexibles de cuerda (en el puente) los cuales tienen un gran efecto en el sonido producido por un instrumento acústico encordado. Los extremos rígidos, pueden ser considerados como modelos razonables para la guitarra eléctrica de cuerpo sólido, en el cual el *decay* máximo es deseado para las notas interpretadas (Smith J. , 2010). Por otra parte, las guitarras acústicas pueden transducir energía de sonido de la cuerda al cuerpo del instrumento y de ahí al aire alrededor. Toda la energía del sonido audible viene de la energía de la cuerda en vibración, reduciendo así el *decay* (tiempo de decaimiento) de cada nota interpretada. Además, debido a que el puente vibra más fácilmente en una dirección que la otra, una especie de efecto chorus es creado a partir de la desafinación en los planos horizontal y vertical de la cuerda en vibración (Jimenez, 2000). Un puente perfectamente rígido, en contraste, no puede transmitir ningún sonido al cuerpo del instrumento, por lo que es requerido otro transductor como son las “pastillas magnéticas” de las guitarras.

Cuando una onda viajera se refleja del puente de un instrumento real encordado, el puente se mueve, transmitiendo la energía del sonido al cuerpo como se mencionó anteriormente. Este movimiento del puente está determinado por la impedancia del punto de conducción del puente, denotado $R_b(s)$. La impedancia del punto de conducción es el radio de la transformada de Laplace de la fuerza sobre el puente, $F_b(s)$, dividido por la velocidad de la moción que resulta $V_b(s)$:

$$R_b(s) = \frac{F_b(s)}{V_b(s)} \quad (4.1.12)$$

Para los sistemas pasivos, es decir, instrumentos que no requieran amplificación, la impedancia del punto de conducción $R_b(s)$ es un valor real positivo. Esto tiene implicaciones fuertes en la naturaleza de $R_b(s)$. En particular, la fase de $R_b(j\omega)$ no puede exceder mas de -90 grados a cualquier frecuencia (Smith J. , 2010), y en los casos sin pérdida, todos los polos y ceros deben entrelazarse a lo largo del eje $j\omega$. Otra implicación es que la reflectancia de un puente pasivo, como se observó en las ondas viajeras en la cuerda, es también llamado la función Schur. Una reflectancia Schur es un filtro estable el cual tiene una ganancia que no excede la unidad a cualquier frecuencia. En resumen, un puente de guitarra es pasivo si y solo si su punto de conducción de impedancia es un real positivo y su reflectancia es Schur.

A $x=0$, la fuerza sobre el puente es dada por:

$$F_b(t) = Ky'(t, 0) = -f(t, 0) \quad (4.1.13)$$

En el dominio de frecuencia de Laplace, se tiene:

$$F_b(s) = KY'(s, 0) = -f(s, 0) \quad (4.1.14)$$

Debido a la linealidad y velocidad del punto final de la cuerda, por lo tanto, es:

$$V(s, 0) = V_b(s) = \frac{F_b(s)}{R_b(s)} = -\frac{F(s, 0)}{R_b(s)} \quad (4.1.15)$$

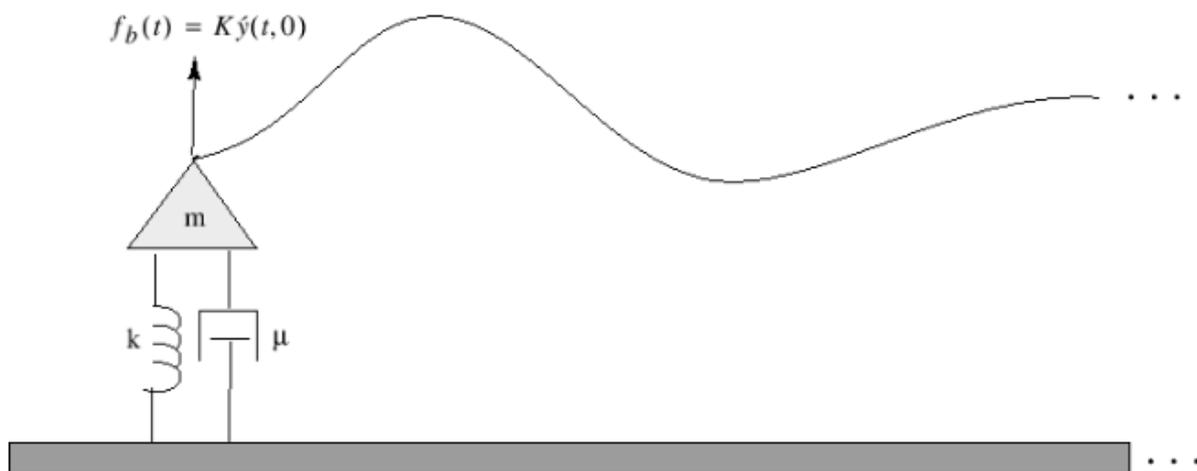
Supongamos que el puente de una guitarra acople una cuerda en vibración ideal a una sola resonancia. Esto es a menudo un correcto modelo de una impedancia de puente acústica en un

estrecho rango de frecuencias, especialmente a bajas frecuencias donde las resonancias son bastante separadas. La impedancia del punto de conducción, visto por la cuerda en el puente es:

$$R_b(s) = ms + \mu + k/s \quad (4.1.16)$$

Así pues, el punto de conducción de impedancia es técnicamente un circuito en serie de una masa m , elasticidad k y un disipador de viscosidad μ . Ya que el puente es pasivo, $R_b(s)$ es real positivo.

Figure 4-5: Analogía mecánica de un sistema amortiguado

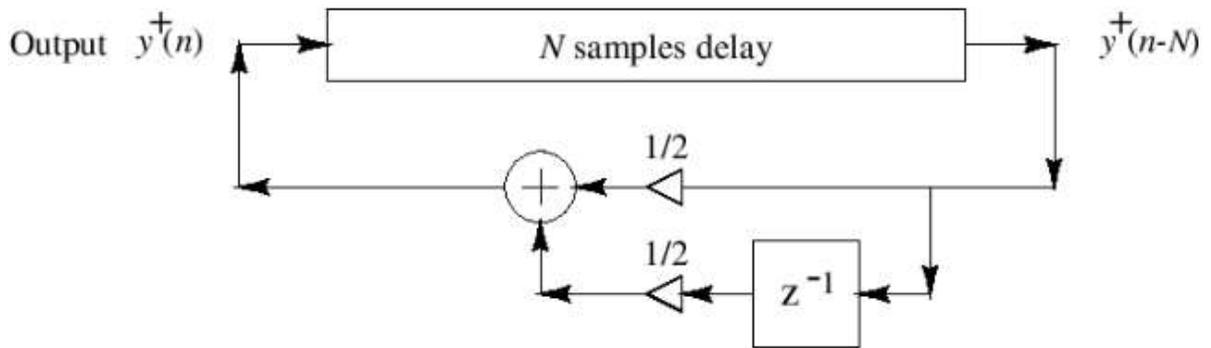


Fuente: Physical Audio Signal Processing (Smith J. , 2010)

4.2 Algoritmo Karplus-Strong y Karplus-Strong Extendido

4.2.1 Karplus-Strong:

Figure 4-6: Cuerda de extremos rígidos con el más simple filtro de pérdida dependiente de la frecuencia



Fuente: Digital Synthesis of Plucked Strings And Drum Timbres (Karplus & Strong, 1983)

El algoritmo de Karplus-Strong, es obtenido cuando las condiciones iniciales de la línea de delay usadas para pulsar la cuerda, consta de números aleatorios o ruido blanco. Este tipo de señal, se caracteriza por poseer la misma potencia para todas las frecuencias y su finalidad en el algoritmo es generar un “burst” corto el cual sonará como la pulsación inicial de la cuerda.

Se sabe que las condiciones iniciales de la cuerda son obtenidas sumando las líneas superiores e inferiores del delay, como se aprecia en la ecuación 4.1.15. La distribución inicial de la velocidad a lo largo de la cuerda es determinada por la resta entre las líneas superiores e inferiores del delay. Así, en el algoritmo de Karplus-Strong, la cuerda es pulsada por un desplazamiento inicial aleatorio y una distribución inicial de velocidad. Esto es una excitación bastante energética y que posteriormente pasará a un filtro promediador como añadió Alex Strong para dar por finalizado el

algoritmo original; el filtro promediador no es más que un filtro pasa bajas, de primer orden, con una ecuación diferencial de la forma:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2} \quad (4.2.1)$$

Al dejar esta ecuación de la forma salida/entrada se tendrá entonces la función de transferencia del filtro llegando así a:

$$\frac{Y(n)}{X(n)} = H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} \quad (4.2.2)$$

Este filtro promediador cumplirá con la teoría de la suma de la onda viajera bidimensional (la onda que va en una dirección con la que va en dirección opuesta).

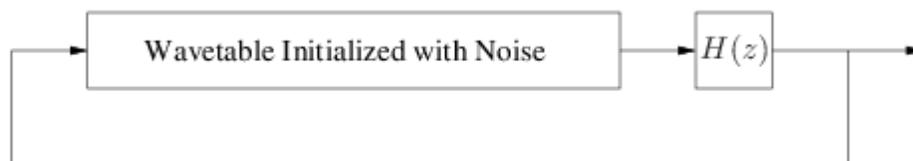
Como se había mencionado anteriormente, la frecuencia fundamental o la que generará el algoritmo, f_0 , estará determinada por el tamaño de la línea de delay y con la frecuencia de muestreo utilizada. En todos los algoritmos implementados, se eligió por el teorema de Nyquist, una frecuencia de muestreo de 44100 Hz. Así entonces, la ecuación es:

$$f_0 = \frac{f_s}{N + 1/2} \quad (4.2.3)$$

Donde N es el tamaño de la línea de delay y f_s es la frecuencia de muestreo. Mas adelante se explicará cómo se llega a este resultado.

El algoritmo irá almacenando los valores de salida del filtro en un vector V , de tamaño determinado por el usuario, el cual determinará el tiempo en el que el sonido se esté reproduciendo o la cantidad de muestras calculadas.

Figure 4-7: Loop de la cuerda con entrada inicializada con ruido blanco



Así pues, como se ve en la figura 4-7, la línea de delay llena por ruido blanco, pasa por el único filtro el cual es el filtro promediador para luego generar y guardar la salida en un vector de tamaño V.

Al acabar con todas las muestras (N muestras de la línea de delay) reinicia otra vez el ciclo desde el principio solo que esta vez, las muestras que pasarán por el filtro promediador serán las muestras que ya habían sido filtradas así hasta cumplir con el tamaño del vector V que definimos.

El algoritmo implementado en Matlab es el siguiente:

```
fs = 44100;    % frecuencia de muestreo
V = 80000;    % tamaño del vector a calcular
f = 880;
N = round(fs/f) % tamaño de la línea de delay (o tabla de onda)
```

Nótese que al calcular el tamaño de la línea de delay N, se utiliza la función round, esto para que la línea de delay tenga un tamaño entero y así no recurrir a casos de interpolación.

```
b = u*[0.5 0.5];
z = 0;
```

En este tramo, se designan los valores para los coeficientes. La variable 'u', en este caso, será la encargada de dar la atenuación por cada ciclo dado por la pérdida de energía cuando la onda viajera llega a un extremo fijo de la cuerda, en este caso el puente.

```
y = zeros(1,V);  
dline = 2 * rand(1, N) - 1.0;  
ptr = 1;
```

Y será entonces el vector de salida que en un principio se llenará con ceros un tamaño de V espacios.

La línea de delay inicial, que se tomará como una tabla de onda, tendrá un tamaño de N muestras y se le asignarán valores pseudoaleatorios que comprenderán desde 0 a 1 con la función rand.

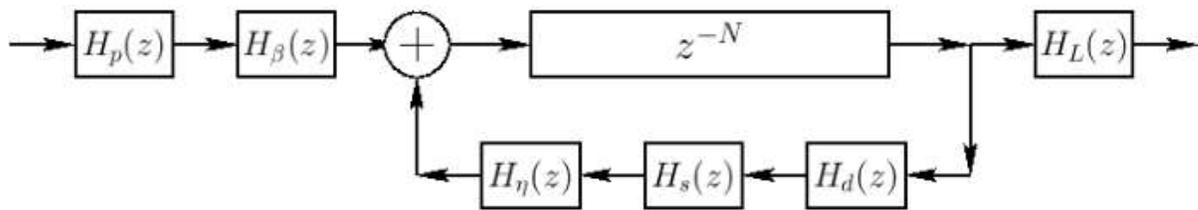
Ptr será entonces el cursor que revisará paso a paso desde la primera muestra hasta llegar al tamaño total N de la línea de delay.

```
for n = 1:V,  
    y(n) = dline(ptr);  
    [dline(ptr), z] = filter(b, 1, y(n), z);  
  
    ptr = ptr + 1;  
    if ptr > N  
        ptr = 1;  
    end  
end
```

Aquí presenciamos la fase del ciclo que va a ir desde 1 hasta el tamaño total del vector a calcular V. Como se puede apreciar, el vector de salida $y(n)$ tomará los valores de la línea de delay (dline) o sea el ruido blanco hasta que el ciclo llegue hasta el valor de la línea de delay N. En ese momento, el puntero retomará al primer valor y entonces la salida ahora serán los valores ya filtrados del ruido blanco hasta completar nuevamente el ciclo de la línea del delay y así hasta completar el tamaño total del vector V.

4.2.2 Karplus-Strong Extendido

Figure 4-8: Diagrama de bloque del algoritmo de Karplus-Strong extendido



Fuente: Physical Audio Signal Processing (Julius O. Smith, 1983)

Este método, creado por David A. Jaffe y Julius O. Smith, se desarrolló partiendo del algoritmo original realizado por Alex Karplus y Kevin Strong el cual fue llamado “Extensions of the Karplus-Strong Plucked String Algorithm” (Julius O. Smith, 1983).

Este algoritmo extendido posee las siguientes características extra que el algoritmo de Karplus-Strong normal:

$$H_p(z) = \frac{1 - p}{1 - pz^{-1}} \quad (4.2.4) = \text{Dirección de pulsamiento de filtro pasa bajas}$$

$$H_\beta(z) = 1 - z^{-\lceil \beta N + \frac{1}{2} \rceil} \quad (4.2.5) = \text{Posición de pulsación en filtro peine}$$

$$H_d(z) \quad (4.2.6) = \text{Filtro damping o promediador de la cuerda}$$

$$H_s(z) \quad (4.2.7) = \text{Filtro pasa todo de rigidez de cuerda (muchos polos y ceros)}$$

$$H_n(z) = \frac{n(N) - z^{-1}}{1 - n(N)z^{-1}} \quad (4.2.8) = \text{filtro all-pass de afinación de cuerda}$$

$$H_L(z) \quad (4.2.9) = \frac{1 - RL}{1 - RL z^{-1}} = \text{filtro pasa bajas de nivel dinámico}$$

Donde

$N = \text{periodo del tono (2x longitud de la cuerda) en samples}$

$\beta = \text{posición de pulsación normalizada} \in (0,1)$

$p = 0$ para una dirección de pulsación. $0 < d < 1$ para la dirección opuesta

$R_L = e^{-\pi LT}$, donde L es el ancho de banda deseado en Hz

$T = \text{Intervalos de muestreo (Hz)}$

$n \in [-1/11, 2/3]$ para delays de afinación en el rango $[0.2, 1.2]$ samples

$|Hd(e^{j\omega T})| \leq 1$ requerido para estabilidad

El algoritmo consiste en un filtro digital de alto orden el cual representa a la cuerda; y un ruido de muy pequeña duración que representa la pulsación. El filtro viene dado por la ecuación diferencial:

$$y_n = x_n + \frac{Y_{n-N} + Y_{n-(N+1)}}{2} \quad (4.2.10)$$

Donde X_n es la amplitud de la entrada de la señal en la muestra n , y_n es la amplitud de la salida de la señal en la muestra n y N es el periodo del tono de la nota deseada en muestras.

La notación utilizada en el texto (Julius O. Smith, 1983), se expresa de la forma:

$$d^k x_n = x_{n-k} \quad (4.2.11)$$

En la ecuación **4.2.11**, d es el operador de delay, x_n es una señal arbitraria y k es un número entero. Así pues, al multiplicar el operador d^k por la señal esta se retrasa k muestras en el tiempo. Luego, es posible representar la ecuación diferencial x en esta notación

$$y_n = x_n + \frac{d^N y_n + d^{N+1} y_n}{2} \quad (4.2.12)$$

$$y_n = x_n + d^N \frac{1+d}{2} y_n \quad (4.2.13)$$

despejando y_n al otro lado de la ecuación se tiene

$$y_n = \frac{x_n}{1 - \frac{1+d}{2} d^N} \quad (4.2.14)$$

Posteriormente, es posible transformar las ecuaciones lineales de delay en el dominio de la transformada Z reemplazando cada señal de tiempo con su transformada Z y reemplazando el operador d por z^{-1} . Para evitar confusiones, se utilizarán letras minúsculas para denotar una señal en el tiempo y su correspondiente transformada Z en mayúsculas.

Como se explicó anteriormente, la función de transferencia de un filtro digital, lineal e invariante en el tiempo, es la transformada Z de la salida dividida por la transformada Z de la entrada. Dicho esto, tomando la ecuación 4.2.14 y pasando la entrada x_n al otro lado de la ecuación se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1+z^{-1}}{2} z^{-N}} \quad (4.2.15)$$

Separando el denominador en 2 funciones de transferencia se tiene

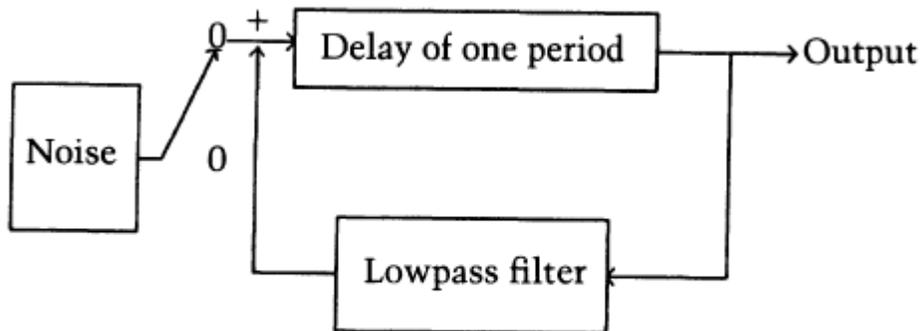
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - H_a(z)H_b(z)} \quad (4.2.16)$$

Donde

$$H_d(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} \quad (4.2.16.1)$$

$$H_b(z) = z^{-N} \quad (4.2.16.2)$$

Figure 4-9: Diagrama del algoritmo base Karplus-Strong



Fuente: Extensions of the Karplus-Strong Algorithm (Julius O. Smith, 1983)

La función de transferencia general encontrada hasta ahora se muestra en la figura 4-9, que consta de un loop retroalimentado el cual abarca una línea de delay de tamaño N $H_b(z)$, en serie con un filtro promediador. Como nos podemos dar cuenta, este modelo es el algoritmo básico de Karplus-Strong.

pulsada

La respuesta en frecuencia de un filtro digital, se encuentra evaluando la función de transferencia a $z = e^{j\omega T_s} = \cos(\omega T_s) + j\text{sen}(\omega T_s)$ (Jaffe, 1983), donde T_s es el periodo de muestreo en segundo y también es el inverso de la frecuencia de muestreo f_s . $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular en radianes, f es la frecuencia sintetizar en Hz y $j = \sqrt{-1}$ es el valor imaginario. La respuesta en frecuencia del modelo de la cuerda es entonces:

$$H(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{1 - H_a(e^{j\omega T_s})H_b(e^{j\omega T_s})} \quad (4.2.17)$$

Donde

$$H_d(e^{j\omega T_s}) = \frac{1 + e^{-j\omega T_s}}{2} = e^{j\omega T_s/2} \cos\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$$

$$H_d(e^{j\omega T_s}) = e^{-\pi f T_s} \cos(\pi f T_s) \quad (4.2.18)$$

Y

$$H_b(e^{j\omega T_s}) = e^{-j\omega N T_s} = e^{-j2\pi f N T_s} \quad (4.2.19)$$

Para este modelo de cuerda, es necesario considerar la respuesta en amplitud y el delay de fase de los filtros separadamente. Para calcular la respuesta en amplitud de un filtro digital, se debe calcular la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro y esto da como resultado una ganancia del filtro en función de la frecuencia trabajada (Julius O. Smith, 1983). El delay de fase es definido como el ángulo complejo negativo de la respuesta en frecuencia dividido por la frecuencia en radianes y esto da como resultado el tiempo de delay en segundos.

Así entonces, la respuesta en amplitud para cada filtro viene dado por

$$G_d(f) = |H_d(e^{j\omega T_s})| = |\cos(\omega T_s/2)| = |\cos(\pi f T_s)| \quad (4.2.20)$$

$$G_b(f) = |H_b(e^{j\omega T_s})| = 1 \quad (4.2.21)$$

Como se puede apreciar en las anteriores respuestas en amplitud, el filtro H_b no tiene pérdidas en ninguna frecuencia mientras que en el filtro H_a su ganancia va decreciendo a medida que aumenta la frecuencia.

Con respecto al delay de fase, es conveniente definirlo en términos de muestras en lugar de tiempo. Así, la respuesta en fase de los dos filtros es

$$P_a(f) = \frac{\angle H_a(e^{j\omega T_s})}{\omega T_s} = \frac{1}{2} \quad (4.2.22)$$

$$P_b(f) = \frac{\angle H_b(e^{j\omega T_s})}{\omega T_s} = N \quad (4.2.23)$$

Donde \angle representa el ángulo complejo de z .

Como se puede apreciar, el filtro promediador posee una fase de delay de media muestra mientras que la línea de delay tiene un delay de fase igual a su tamaño.

Ya que los filtros H_a y H_b en serie, son los que constan del loop total, la ganancia del loop y el delay de fase total viene dado por

$$\text{ganancia del loop} = G_a(f) + G_b(f) = \cos(\pi f T_s) \quad (4.2.24)$$

Y la fase viene dada por:

$$\text{tamaño de loop(muestras)} = P_a(f) + P_b(f) = N + \frac{1}{2} \quad (4.2.25)$$

$$\text{tamaño de loop(segundos)} = T_s N + \frac{T_s}{2} \quad (4.2.26)$$

En el momento de sintetizar una nota, se inicializa la línea de delay H_b con números aleatorios escalados en un tiempo cero y esto hace que el algoritmo no requiera de una señal de entrada.

Debido a que el filtro H_a está cambiando constantemente el contenido del loop, la señal de salida no es periódica (casi periódica).

En el primer periodo del sonido de la cuerda sintetizada, en un tiempo particular, corresponde al contenido de la línea de delay en un tiempo particular mientras que los posteriores periodos corresponden a una versión filtrada en pasa bajas del periodo anterior, como se explicó en el algoritmo de Karplus Strong original.

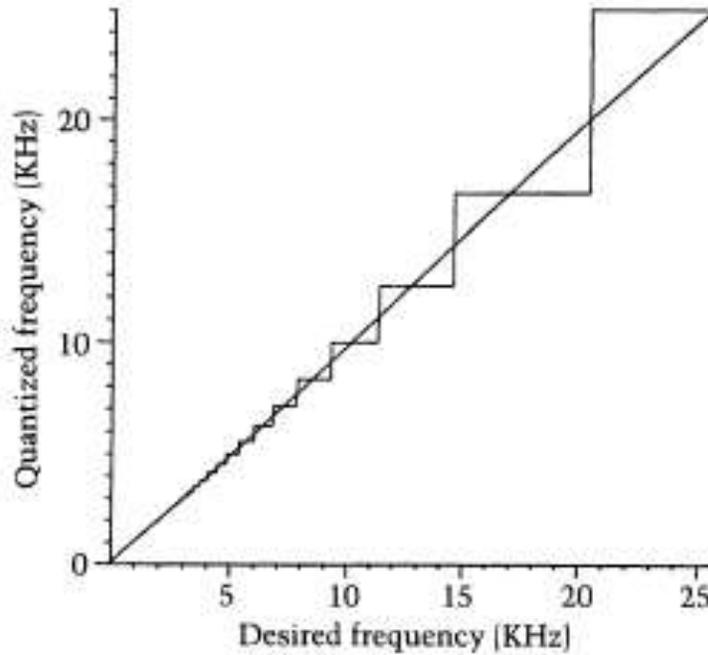
A pesar de que el loop es inicializado con números aleatorios, después de un corto tiempo las frecuencias primarias presentes en el loop son aquellas que tienen un número integral de periodos en $N + \frac{1}{2}$ muestras (Julius O. Smith, 1983). Todas estas frecuencias son múltiplos de la frecuencia f_a la cual su periodo encaja exactamente el tamaño del loop $N + \frac{1}{2}$.

La frecuencia fundamental, o la frecuencia a sintetizar, viene dada por el inverso del tamaño del loop en segundos, como se aprecia en la ecuación 4.2.26

$$f_1 = \frac{1}{(N + 1/2)T_s} = \frac{f_s}{N + \frac{1}{2}} \quad (4.2.27)$$

El hecho de que N sea un número entero, causa errores al momento de lograr una afinación precisa ya que como se aprecia en la Figura 4-10, las frecuencias permitidas deben ser cuantizadas, especialmente en altas frecuencias. Para valores de N muy grandes (baja frecuencia pues son inversamente proporcionales) la diferencia entre N y $N + \frac{1}{2}$ se vuelve prácticamente insignificante. Así mismo, para altas frecuencias (N pequeño) la diferencia puede ser bastante notoria. La grafica 4-10, nos muestra la distorsión en frecuencia que se da por este fenómeno con una frecuencia de muestreo de 50 kHz.

Figure 4-10: Gráfica de errores de afinación debido a la cuantización



Fuente: Extensions of the Karplus-Strong Algorithm (Julius O. Smith, 1983)

Para corregir el problema que se manifiesta en la figura 4-10, se debe tomar el tamaño del loop en términos del delay de fase. La ecuación que da resultado a la frecuencia fundamental es

$$f_1 = \frac{f_1}{N + P_d(f_1)} \quad (4.2.28)$$

Donde $P_d(f_1) = 1/2$ cuando el filtro promediador es utilizado para H_a . Para arreglar la diferencia entre f_1 y la frecuencia correcta, se debe introducir un filtro, el cual aporte un delay muy pequeño en el loop y al mismo tiempo sin alterar la ganancia de este. Para ello se adhiere un filtro all-pass con la siguiente ecuación diferencial.

$$y_n = Cx_n + x_{n-1} - Cy_{n-1}$$

Con su respectiva función de transferencia

$$H_n(z) = \frac{C + z^{-1}}{1 + Cz^{-1}} \quad (4.2.29)$$

Donde C es el único coeficiente a ser ingresado. Por estabilidad del filtro, debe cumplirse que $|C| < 1$. La función de transferencia total de la cuerda, ahora viene dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - H_d(z)H_b(z)H_n(z)} \quad (4.2.30)$$

Al ser el filtro $H_c(z)$ tipo all-pass, la respuesta en amplitud de este es igual a la unidad, de la forma

$$G_n(f) = |H_n(e^{j\omega T_s})| = \frac{C + e^{-j\omega T_s}}{1 + C e^{-j\omega T_s}} = 1 \quad (4.2.31)$$

La ganancia del loop, viene dada por $G_c(f)G_c(f)G_c(f) = \cos(\pi f T_s)$, al igual que como se vio en la ecuación 4.3.17.

El filtro a diseñar, requiere un delay de fase entre 0 y T_s segundos. El delay de fase para el filtro tipo all-pass de primer orden H_n es dado por

$$\begin{aligned} P_n(f) &= -\frac{\mathcal{L} H_n(e^{j\omega T_s})}{\omega T_s} \\ &= -\frac{1}{\omega T_s} \mathcal{L} \frac{C + e^{-j\omega T_s}}{1 + C e^{-j\omega T_s}} \\ &= \frac{\mathcal{L}(1 + C e^{-j\omega T_s})}{\omega T_s} - \frac{\mathcal{L}(C + e^{-j\omega T_s})}{\omega T_s} \\ &= \frac{1}{\omega T_s} \tan^{-1} \left(\frac{-C \sin(\omega T_s)}{1 + C \cos(\omega T_s)} \right) \\ &= \frac{1}{\omega T_s} \tan^{-1} \left(\frac{-\sin(\omega T_s)}{C + \cos(\omega T_s)} \right) \quad (4.2.32) \end{aligned}$$

Cuando el argumento del arcotangente (tangente a la menos 1) tiene una magnitud menor que 1, se puede utilizar la expansión de series de potencia. Así, para bajas frecuencias, la expresión 4.3.29, se puede aproximar de la forma

$$P_n(f) = \frac{\sin(\omega T_s)}{\omega T_s (C + \cos(\omega T_s))} - \frac{C \sin(\omega T_s)}{\omega T_s (1 + \cos(\omega T_s))}$$

$$= \frac{1}{C+1} - \frac{C}{1+C} = \frac{1-C}{1+C} \quad (4.2.33)$$

Ya con la debida corrección de la frecuencia, el próximo filtro a implementar es el de dinámica. El nivel de salida del algoritmo está determinado por el nivel de entrada del ruido. Esto no nos permite realizar un buen control de la dinámica que proporciona un instrumento encordado real puesto que, al variar el nivel de entrada, da más la impresión que cambiara la distancia entre la fuente y el oyente que la dinámica en sí misma.

Hay que tener presente que, al momento de pulsar una cuerda de forma fuerte, esta tiene mayor energía en los parciales más altos a diferencia de cuando se pulsa una cuerda de forma suave (Julius O. Smith, 1983). Esta simulación de dinámica está basada en modelar esta diferencia en balance espectral.

El ancho de banda es controlado mediante un filtro pasa bajas de un polo, aplicado al vector de ruido blanco inicial antes de ingresar al loop de la cuerda. La ecuación diferencial del filtro de dinámica es

$$y_n = (1 - R)x_n + R y_{n-1}$$

Y su respectiva función de transferencia

$$H_L(z) = \frac{1 - R}{1 - Rz^{-2}} \quad (4.2.34)$$

El siguiente filtro a tratar, es el que determina la posición de pulsamiento en la cuerda y esto se logra introduciendo ceros uniformemente distribuidos a lo largo del vector inicial de ruido blanco. Al realizar esto, se da el efecto de interpretación del instrumento a diferentes distancias desde el puente. El vector de ruido blanco, es filtrado con un filtro tipo peine H_p , el cual tiene una ecuación diferencial

$$y_n = x_n - x_{n-\mu N}$$

Y su respectiva función de transferencia

$$H_p(z) = 1 - z^{\mu N} \quad (4.2.35)$$

Donde μ es la fracción de la cuerda entre el puente y la posición de pulsación. Cuando $\mu = 1/2$, los armónicos pares son removidos y es igual a tocar la cuerda en un punto medio de la cuerda. De la misma forma, cuando se tiene $\mu = 1/10$, todo decimo armónico es suprimido y el efecto es el de pulsar la cuerda a una décima fracción desde el puente (Julius O. Smith, 1983).

Por último, se tiene el filtro de rigidez de cuerda puesto que esta, en la vida real, siempre tiene un grado de rigidez ya que no se está trabajando en condiciones ideales. Hasta ahora, los componentes espectrales del algoritmo básico los cuales tienen amplitud significativa son casi perfectamente armónicos por lo que hay que modificar el espectro del algoritmo acorde a la teoría de cuerdas donde se indica que la rigidez crea un estiramiento de los parciales (Jaffe, 1983), de la forma

$$f_k \approx kf_0 \left[1 + \delta + \left(\frac{1 + k^2\pi^2}{8} \delta^2 \right) \right] = kf_0 s(k) \quad (4.2.36)$$

$$k = 1, 2, 3 \dots \quad k^2 < \frac{4}{\pi^2 \delta^2}$$

Donde k es el número del parcial. El parámetro delta (δ) es llamado coeficiente de inarmonicidad. Cuando este coeficiente es igual a cero trae como resultado una perfecta armonía (Laakso, 1996).

La inarmonía resulta de cambiar la frecuencia de acuerdo al coeficiente ingresado, entre mayor sea el número del coeficiente mayor será el cambio en frecuencia. Para ello, se implementará al igual que en el caso de afinación, un filtro tipo all-pass $H_s(z)$ en el loop de la cuerda el cual cambiará el tamaño del delay del loop dependiendo de su coeficiente.

El delay de fase deseado para el filtro all-pass ingresado en el loop de la cuerda con una frecuencia f_1 está dado por

$$f_k = \frac{k}{p_0 + P_s(f_k)} = \frac{kf_1 s(k)}{s(1)} \quad (4.2.37)$$

Resolviendo para $P_s(f_k)$

$$P_s(f_k) = \frac{s(1)}{f_1 s(k)} - P_0 \quad (4.2.38)$$

Donde P_0 es el tamaño del loop sin la contribución del filtro all-pass H_g .

Para aplicar toda la teoría anterior en Matlab, con sus respectivos filtros, de acuerdo al diagrama de bloque presentado en la figura 4-8, se tomó como base el algoritmo original presentado en el objetivo 2. Para ello, una vez más se inician las variables fundamentales

```
fs = 44100;    % frecuencia de muestreo
V = 100000;   % tamaño del vector a calcular
f = 440;      % frecuencia fundamental
N = round((fs/f)-0.5) % tamaño de la línea de delay
```

Una vez inicializadas las variables fundamentales, se procede a definir los diferentes coeficientes a_x y b_x para cada filtro, donde x es el número asignado para diferenciar los filtros.

```
b1 = p*[0.5 0.5]; %Filtro promediador

b2 = [C 1] % Filtro all-pass para afinación
a2 = [1 C]

b3 = [1-R] %Filtro pasa bajas para dinamica
a3 = [1 -R]

b4 = zeros(1, uN); %Filtro peine para posicionamiento
b4(1) = 1;
b4(uN) = -1;
b4;
```

Cabe notar que no están los coeficientes para el filtro diferenciador de ataque, el cual realiza la tarea de diferenciar entre pulsación hacia arriba y hacia abajo. Esto se debe a que al no ofrecer criterios para el diseño pasa bajas de primer orden, se eligieron los coeficientes del filtro promediador (filtro pasa bajas de primer orden) para el filtrado del ruido de entrada.

pulsada

El diseño del filtro de rigidez de cuerda, depende del tamaño del loop por lo que se trabajará posteriormente con la función de Matlab `fdesign.arbgrpdelay`, la cual, puede diseñar filtros con un delay de grupo establecido.

Se procede entonces, como se vio anteriormente a inicializar la línea de delay, donde una vez más se lleva ruido pseudoaleatorio a la entrada en el vector `dline`

```
y = zeros(1,V);
dline = 2 * rand(1, N) - 1.0;
ptr = 1;           %Puntero que recorrerá punto a punto la línea de delay
```

Como se puede apreciar en la figura 4-8, los filtros anteriores al loop de la cuerda son H_p y H_B que son los filtros de diferenciación de ataque y posición de pulsamiento, respectivamente. Para el filtro de posición de pulsamiento, se inicializa una variable `u`, que es la encargada de dar la fracción entre el puente y el punto de pulsación, como se revisó anteriormente

```
%Filtro de posicionamiento de pulsacion
u = 1/2;
[dline , z] = filter(b4, 1, dline);
```

Este filtro, estaría haciendo efecto directamente al ruido pseudoaleatorio del vector de entrada inicial `dline`. Posteriormente, se da la opción para elegir entre el tipo de ataque, es decir, pulsación hacia arriba o hacia abajo. Para ello, se inicializó una variable llamada “pulsación”, la cual, si está en 0, se tomará como una pulsación hacia abajo lo que por medio de un condicional hace que entre a la etapa de filtrado mientras que, si es 1, se toma como si el ataque fuera hacia arriba, con lo que se saltaría el proceso de filtrado dejando el vector `dline` exactamente igual como en la salida del filtro de posición de pulsación

```
if Pulsacion == 0

    [dline , z] = filter(b1, 1, dline);

else

end
```

Es el momento entonces de entrar al loop de la cuerda, que como se aprecia en la figura z, son la línea de delay con los filtros en serie H_d , H_s y H_n que son: filtro promediador, filtro de rigidez y filtro de afinación respectivamente.

```

for n = 1:V,
    y(n) = dline(ptr);
    [buffer, z] = filter(b1, 1, y(n), z);
    [buffer, z] = filter(b2, a2, buffer, z);
    [dline(ptr), z] = filter(b5, a5, buffer, z);

    ptr = ptr + 1;
    if ptr > N
        ptr = 1;
    end
end
end

```

Por último, se tiene el filtro de dinámica, el cual hará efecto sobre la salida del loop de la cuerda

```
[y, z] = filter(b3, a3, y, z);
```

Para el diseño del filtro de rigidez, como se mencionó anteriormente y como se evidencia en la ecuación 4.2.36, es necesario obtener el coeficiente de inarmonicidad δ , el cual se puede calcular con la siguiente ecuación (Matthew, 2010):

$$\delta = \frac{\pi^3 E d^4}{64 k l^2} \quad (4.2.39)$$

Que como se mencionó en el marco conceptual: E, es el módulo de Young (en este caso para el material de Nailon); d, es el diámetro de la cuerda en cm; l, es la longitud de la cuerda en cm y k es la tensión de la cuerda en Newtons. Para este método entonces, se caracterizó la guitarra Yamaha C40 de la siguiente forma:

$$\text{Módulo de Young, } E_{\text{nailon}} = 0.10 - 0.35$$

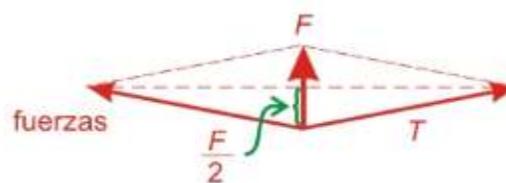
El encordado de la guitarra en cuestión, tiene los siguientes diámetros de cuerdas

Table 4-1: Diámetro de cuerda por nota

Diámetro (cm)	1. Mi	2. Si	3. Sol	4. Re	5. La	6. Mi
	0.1	0.13	0.17	0.32	0.42	0.52

Para calcular las tensiones de todas las cuerdas, se tuvo que hacer uso de un dinamómetro, el cual, realiza un estiramiento de la cuerda y mide la fuerza trasversal de acuerdo a la elasticidad del material de la cuerda.

Figure 4-11: Relación de fuerza con tensión



Como se observa en las figuras 4-11, la ecuación correspondiente que relaciona la tensión con la fuerza es (Matthew, 2010):

$$\frac{K}{F/2} = \frac{l/2}{d} \quad (4.2.39)$$

Despejando k de la ecuación

$$K = \frac{f l}{4d} \quad (4.2.40)$$

Para la longitud de estiramiento l , se tomó como referencia 0.5 cm para todas las cuerdas. Es necesario recalcar que, en el dinamómetro utilizado, el resultado viene dado en gramos que es unidad de masa. Para pasarlo a fuerza en newtons, es necesario multiplicar este resultado por la aceleración dada por la gravedad, llegando así a los siguientes resultados en términos de fuerza

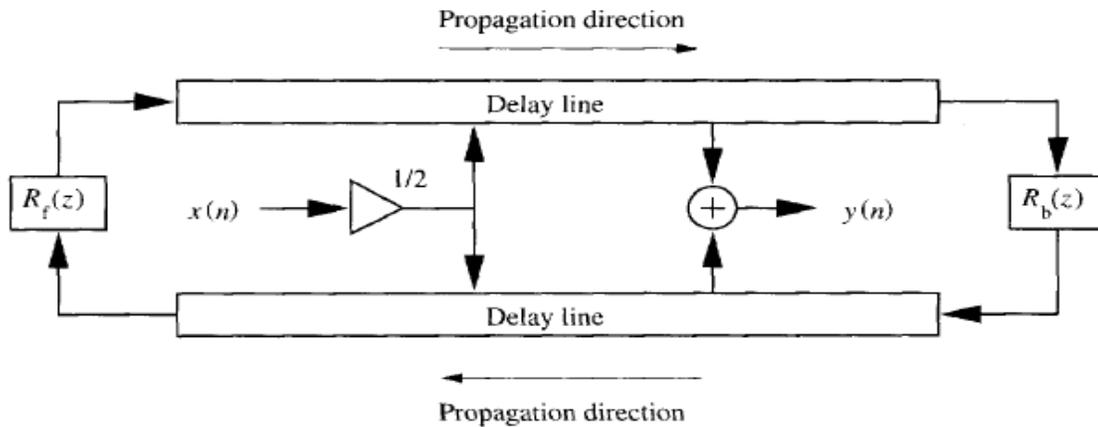
4.3 Algoritmo por Guía de onda:

Para el cumplimiento del tercer objetivo específico del presente trabajo de grado, en un principio, se pensó en adicionar módulos extra al algoritmo básico de Karplus-Strong para que cumpliera con el objetivo de que fuese de mayor complejidad. Esto se pudo haber logrado, pero llevarían la misma lógica de el algoritmo Karplus-Strong extendido, que, a grandes rasgos, es el algoritmo KPS básico con módulos extra. En lugar de ello, se decidió implementar un solo método el cual evidencia mayormente la teoría de modelado físico.

Estudios posteriores a la realización del algoritmo de Karplus Strong convergieron a la investigación de guías de onda digitales irónicamente puesto que en teoría se debía conocer este tema para la realización de la síntesis por modelado físico.

El estudio de la física involucrada en esta técnica computacional para la generación de este tipo de síntesis fue llevado por el profesor Julius Smith y continuada por el doctor Vesa Valimaki con un nuevo modelo de guía de onda al cual llamó Single delay-loop (retraso de muestra individual) o SDL (Matti & Vesa, 1999). Este modelo tiene como característica que es más eficiente computacionalmente en la estructura de sus filtros digitales y brinda una mayor comprensión de la teoría inmersa en el modelado físico.

Figure 4-12: Diagrama de modelo de cuerda con filtros de reflexión en los extremos



Fuente: Plucked String Models (Matti & Vesa, 1999)

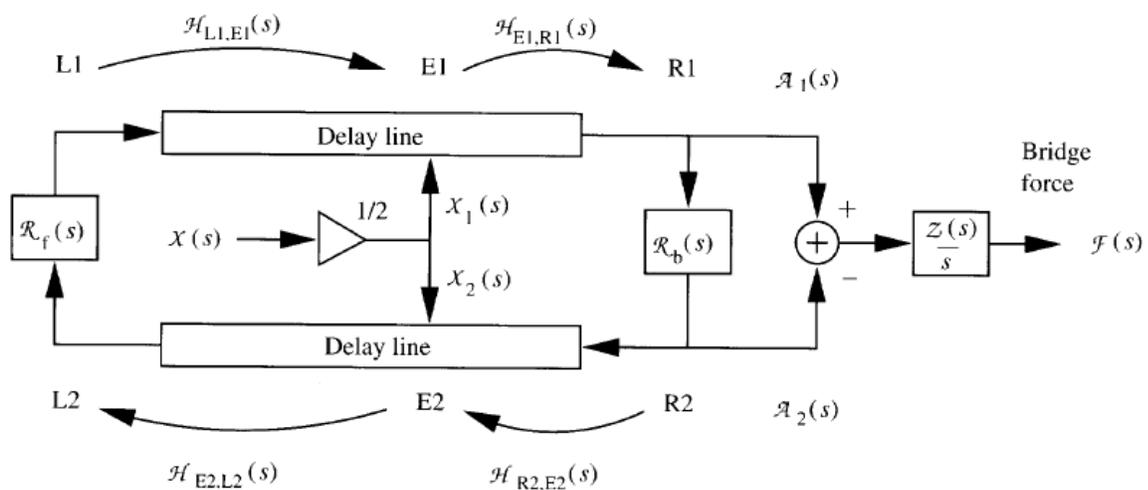
El modelo está diseñado para dos casos: cuerda con salida de puente o cuerda con salida por pickup (pastilla magnética). Para la síntesis de una guitarra acústica solo será de nuestro interés el primer caso.

La salida de la cuerda, ya sea la fuerza en el puente de un instrumento acústico o el voltaje en los pickups magnéticos, reaccionan a la excitación generada (como por ejemplo de una pulsación) que inicia componentes de onda los cuales viajan a través de la cuerda. Una aceleración o velocidad de entrada al modelo de la cuerda puede ser aproximado a un impulso unitario. Es posible entonces considerar el modelo de cuerda como un filtro lineal en términos de respuesta al impulso si se asume la linealidad y la invarianza en el tiempo del sistema.

Para comenzar con este modelo, se describen las funciones de transferencia de este por medio de la transformada de Laplace, en el dominio s (sistemas continuos en el tiempo). Esto facilita la manipulación de integrales y derivadas que, en este dominio se toman como divisiones y multiplicaciones respectivamente. Al reemplazar la variable compleja s por $j\omega$, siendo $j\sqrt{-1}$ y ω la frecuencia en radianes o $2\pi f$ para derivar la correspondiente representación en el dominio de la transformada de Fourier, en el dominio de la frecuencia.

Posteriormente, se llevará esta representación del dominio continuo al dominio discreto en el dominio de la transformada Z.

Figure 4-13: Diagrama de guía de onda de cuerda vibrante con sus funciones de transferencia



Fuente: Plucked String Models (Matti & Vesa, 1999)

Como se puede apreciar en la figura 4-13, en esta notación $H_{a,b}$ se refiere a una función de transferencia que va desde un punto 'a' hasta el 'b'.

La excitación de entrada $X(s)$ en este caso se divide en dos partes, $x_1(s)$ y $x_2(s)$, de forma que:

$$X_1(s) = X_2(s) = \frac{X(s)}{2} \quad (4.3.1)$$

El modelo simplifica puntos de excitación equivalentes como en el caso del punto E1, que toma los efectos netos de los puntos E2 y E1. Así pues, asumiendo que la terminación del puente (R1 Y R2) esta hacia el lado derecho de la entrada (E1 Y E2), el punto de excitación equivalente en E1 se puede expresar como:

$$\begin{aligned} X_{E1,eq}(s) &= X_1(s) + H_{E2,L2}(s)R_f(s)H_{L1E1}(s)X_2(s) \\ &= \frac{1}{2}[1 + H_{E2,E1}(s)]X(s) = H_E(s)X(s) \quad (4.3.2) \end{aligned}$$

Donde el sufijo "eq" representa el punto de equivalencia y $X_{E2,E1}(s)$ es la función de transferencia del lado izquierdo de E2 a E1 conteniendo de igual forma las funciones de transferencia parciales de E2 a L2 y L1 a E1 como también la función de reflexión $R_f(s)$. Luego, $H_E(s)$ es la función de transferencia de excitación equivalente.

La señal de salida de interés es la fuerza transversa $F(s)$ en el puente. La ecuación correspondiente a esta fuerza es:

$$\begin{aligned} F(s) &= F_+(s) + F_-(s) = Z(s)[V_+(s) - V_-(s)] \quad (4.3.3) \\ &= Z(s)[A_1(s) - A_2(s)]/s \quad (4.3.4) \end{aligned}$$

Donde los sufijos '+' y '-' denotan las 2 direcciones de propagación opuestas. La ecuación 4.3.3 indica que la fuerza en el puente es la impedancia $Z(s)$ multiplicado la diferencia de los componentes de velocidad $V_+(s)$ y $V_-(s)$ en el puente. La diferencia de aceleración $A_1(s) - A_2(s)$ es integrada (operador $1/s$) para producir la diferencia de velocidad $V_+(s)$ y $V_-(s)$. Por lo tanto

$$F(s) = Z(s)[A_1(s) - A_2(s)]/s$$

$$\begin{aligned}
&= Z(s)[A_1(s) - R_b(s)A_1]/s \\
&= Z(s)[1 - R_b(s)]A_1/s \\
&= H_b(s)A_1(s) \quad (4.3.5)
\end{aligned}$$

Donde $H_b(s)$ es la función de transferencia de aceleración a fuerza en el puente. Entonces

$$A_1(s) = H_{E1.R1}(s)X_{E1.eq}(s) + H_{loop}(s)A_1(s) \quad (4.3.6)$$

Donde

$$H_{loop}(s) = R_b(s)H_{R2.E2}(s)H_{E2.E1}(s)H_{E1.R1}(s) \quad (4.3.7)$$

$H_{loop}(s)$ es la función de transferencia cuando la señal circula una vez alrededor del ciclo. Así, la suma de términos de la ecuación 4.3.6, corresponde respectivamente a la señal de excitación equivalente $X_{E1.eq}(s)$ transferida al punto R1 y a la señal $A_1(s)$ transferida una vez a lo largo del ciclo. Así se tiene que

$$A_1(s) = H_{E1.R1}(s) * \frac{1}{1 - H_{loop}(s)} X_{E1.eq}(s) \quad (4.3.7)$$

$$A_1(s) = H_{E1.R1}(s)S(s)X_{E1.eq}(s) \quad (4.3.8)$$

Donde $S(s)$ es la función de transferencia de la cuerda que representa la recursión a lo largo del ciclo de la cuerda. Ya con todas estas ecuaciones se puede resolver una función de transferencia general desde la excitación a la salida del puente, de la forma

$$H_{E.B}(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = \frac{1}{2} [1 + H_{E1.R1}(s)] \frac{H_{E1.R1}(s)}{1 - H_{loop}(s)} Z(s) \frac{1}{s} [1 - R_b(s)] \quad (4.3.9)$$

O de una forma más compacta basada en la notación anterior

$$H_{E.B}(S) = H_E(S)H_{E1.R1}(s)S(s)H_b(s)$$

El cual representa la contribución en cascada de cada parte en el sistema físico de la cuerda.

Como se había mencionado anteriormente, para un sistema digital es necesario aproximar el modelo de sistema de tiempo continuo de la guitarra en el dominio de la transformada de Laplace con un modelo de sistema discreto en el tiempo en el dominio de la transformada Z. Reescribiendo entonces la ecuación (4.3.9) se tiene que

$$H_{E.B}(Z) = H_E(Z)H_{E1.R1}(Z)S(Z)H_b(Z) \quad (4.3.10)$$

Donde

$$H_E(z) = \frac{1}{2} [1 + H_{E2.E1}(z)] \quad (4.3.10.1)$$

$$S(z) = \frac{1}{1 - H_{loop}(z)} \quad (4.3.10.2)$$

$$H_B(z) = Z(s)I(z)[1 - R_b(z)] \quad (4.3.10.3)$$

El filtro I(z) es una aproximación, discreta en el tiempo, de la operación de integración del dominio del tiempo.

La función de transferencia $H_{E2.E1}(z)$ en la ecuación 4.3.2, es casi un delay sin pérdidas y es posible dejar el bloque de filtro pasa bajas en el filtro de posición de excitación (o reemplazarlo con una constante ligeramente menor que 1). Es posible notar que, en condiciones normales de interpretación del instrumento, la propagación de la onda del punto E1 a la posición del puente R1 es también muy cercano a un delay sin pérdidas, por lo que se puede despreciar sin tener efectos perceptibles. El ciclo de la cuerda S(z) (o string loop) en la ecuación x no puede ser reducido puesto que el delay y el filtro del loop tipo pasa bajas son críticos en la calidad del sonido. Finalmente, el término $[1 - R_b(z)]$ en el bloque del puente $H_b(z)$ en la ecuación 4.3.10.3, puede ser aproximado por la constante 2 puesto que $R_b(e^{j\omega}) \approx -1$.

. La tabla de excitación puede contener algunas señales útiles como impulso unitario o una excitación compleja agregada (Smith, 1993). Por ejemplo, este es una forma muy eficiente de implementar las resonancias del cuerpo de un instrumento pues la respuesta del cuerpo puede ser conmutada nuevamente a la excitación debido a que se asume que es lineal e invariante en el tiempo.

La tabla puede ser también un conjunto de excitaciones a elegir. El control de ganancia es un simple multiplicador. El control de timbre puede ser un filtro recursivo de primer o segundo orden que puede ser ajustado para atenuar o fortalecer las altas frecuencias de un ataque suave o fuerte, respectivamente (Jaffe, 1983). El control de timbre debe cambiar con la frecuencia fundamental para dar una percepción corregida de la fuerza del ataque.

El control de posición de pulsación (o pluck-position en inglés) es un filtro tipo peine ajustable, donde el delay corresponde al tiempo que toma la excitación de recorrer la ruta de la parte izquierda de E2 a E1 en la figura 4-8. En la práctica, uno puede usar en lugar el delay de la parte derecha del punto E1 a E2 el cual normalmente es más corto. El filtro tipo peine creará una serie de ceros en la función de transferencia a frecuencias $f_m = m/t_D$, donde t_D es el delay en segundos del filtro peine y m es el índice de integración ($m=0,1,2,3\dots$)

El integrador de la salida del puente puede ser aproximado por un filtro pasa bajas recursivo de primer orden el cual su frecuencia de corte este por debajo de la frecuencia fundamental más baja a ser sintetizada. Uno puede considerar el filtro de posición de pulsación y el integrador de salida juntos, ya que a frecuencia cero el cero en el primer filtro será cancelado por un polo en el último.

El bloque de delay debe permitir para una afinación correcta del tiempo de delay para lograr todos los valores los valores tonales deseados (Jaffe, 1983). Esto es logrado por técnicas de filtros de delay fraccional como filtro all-pass de primer orden o interpolación de Lagrange (Laakso, 1996).

El filtro loop también tiene que ser controlable para que el decaimiento de los componentes de los armónicos pueda ser ajustados propiamente acorde al tamaño de la cuerda y a otros parámetros variantes de la cuerda. Una popular elección es un filtro loop digital de un polo con dos parámetros: ganancia DC y parámetro de frecuencia de corte.

El algoritmo implementado en Matlab es el siguiente:

```
v = 10000;  
r = [-.25 -.5 -.25];  
x = 0.5;  
  
len = 50;  
pickup = len;
```

Primero, como se realizó anteriormente, se crea un vector v , el cual será el tamaño de muestras a calcular, en otras palabras, el tiempo de reproducción de la nota designada. La variable r , es un vector que abarca los coeficientes del filtro FIR de reflexión. Modificando los coeficientes de r se obtienen distintos tipos de timbre de la nota a sintetizar. La posición en donde se interpreta el instrumento viene dada por x , que como se ve en el código, se inicializó con $1/2$, que es la mitad entre el punto del puente y la cejilla. Por otro lado, se tiene la variable len , que es el tamaño de cada guía de onda, en samples. La salida queda dada por la variable $pickup$, que viene dada por el tamaño de las guías de onda len .

```
firlen = length(r);  
firHlen = floor(firlen/2);
```

Posteriormente, se crean variable la cual tiene el tamaño del vector del filtro de reflexión y otra que es la mitad del tamaño de reflexión r , redondeado.

Para denotar la dirección de desplazamiento de la onda viajera, se utilizará el signo $+$ cuando la onda se desplaza hacia la derecha y $-$ si es en dirección contraria.

Se procedé entonces a crear la línea de delay+ que debe ser lo suficientemente grande para albergar los puntos del filtro r centrados en el punto final del puente. La línea de delay- tendrá el tamaño de la línea de delay sin el filtro de reflexión. Las líneas de delay son inicializadas con ceros.

```
r1en = len + firlen - firHlen;  
right = zeros(1,r1en);  
left = zeros(1,len);
```

Para aplicar la posición x se debe crear un nuevo vector, interpretado como la proporción a lo largo de la cuerda de acuerdo a la fracción de posición de donde fue pulsada.

```
pluck = x*(len-1);
x = [ [0:floor(pluck)]/pluck, ...
      (len - 1 - [(floor(pluck)+1):(len-1)])/(len - 1 - pluck) ];
```

Debido a que en el modelo la velocidad inicial es plana, los desplazamientos iniciales para las ondas que van en direcciones opuestas. Por ello, se puede hacer el siguiente procedimiento

```
left(1:len) = x(1:len)/2;
right(1:len) = x(1:len)/2;
```

A continuación, se crea un espacio en el vector de dirección+ para albergar el filtro de reflexión

```
right(len+1) = 0;
```

La salida $Y(n)$ se inicializa entonces con ceros de acuerdo al tamaño que proporcionamos con la variable v

```
y = zeros(1,v);
```

El último tramo del algoritmo es loop de la cuerda, donde se deben sumar las ondas que viajan en las dos direcciones. Para ello, la línea de delay que está en sentido de derecha a izquierda se mueve una muestra. La cejilla o “nut” tendrá el primer valor de esta línea de delay, pero con signo negativo (se asume una reflexión perfecta). Para finalizar, la línea de delay con dirección izquierda-derecha se mueve una muestra dejando como primer valor el de la cejilla, es decir, el primer valor de la otra línea de delay con un signo contrario.

```
left = [left(2:len),0];
nut = -left(1);
right = [nut, right(1:len)];
```

En la última etapa del loop, se aplica el filtro de reflexión a las muestras finales de la onda para utilizar este valor como el final de la onda-

```
bridge = r * right( (len-firHlen-1)+[1:firlen] )';  
left(len) = bridge;
```

Ya completadas las líneas de delay (izquierda y derecha), se toma la salida como la suma de los dos

```
y(t) = left(pickup) + right(pickup);
```

El ciclo va desde 1 hasta el número v, llenando el vector de salida para su posterior reproducción. Debido a que el vector no está escalado, es posible escuchar el resultado con la función “soundsc”, la cual, escala automáticamente el vector o simplemente se puede realizar el proceso con la siguiente línea de código

```
y = y ./ (max(abs(y)) + 0.1);
```

5. Pruebas y resultados

5.1 Pruebas:

Para este análisis de los distintos métodos utilizados, se tendrá en cuenta tanto el decaimiento de cada nota interpretada por medio del tiempo de decaimiento $T60$, método recomendado por Julius Smith (Julius O. Smith, 1983) como también el análisis frecuencial, que conlleva al análisis de la distribución armónica del instrumento interpretado a la frecuencia deseada.

Al tener 48 muestras para analizar (4 octavas), se tomarán las muestras más significativas para comprobar el comportamiento del sonido generado con respecto a la grabación del instrumento real. Cabe mencionar que, tanto las gráficas del tiempo de decaimiento como el espectro en frecuencia del audio, se generaron a través del software Audacity y se pueden encontrar en su totalidad en la parte de Anexos. Las gráficas generadas, se encuentran en una resolución logarítmica para poder apreciar mejor su distribución armónica.

Para el análisis en frecuencia y decaimiento, en general para los tres métodos, se tomarán las cuerdas: 1. Mi (82.41 Hz), 3. Sol (196 Hz) y 6.Mi (329.63 Hz). Se realizó el análisis en estas tres cuerdas pues cubren frecuencialmente la parte de las cuerdas al aire. Cada gráfica de la nota respectiva, tendrá una tabla la cual mostrará el nivel en que se encuentra la nota fundamental (F_0) y sus 8 parciales subsecuentes. Además de esto, se agregó una fila en la tabla, la cual mostrará la diferencia de nivel entre los parciales con respecto a la nota fundamental, esto para que se pueda encontrar de una forma medible la diferencia de energía de los parciales con respecto a la guitarra real.

Para realizar el análisis del filtro de rigidez del algoritmo de Karplus-Strong extendido, se tomó la sexta cuerda interpretada en el doceavo traste puesto que, por el calibre de la cuerda y por la longitud de esta, tendrá el mayor valor para el coeficiente de inarmonicidad.

Los métodos de Karplus-Strong extendido y por Guía de onda, están con una posición de pulsación en la mitad entre la cejilla y el puente. De igual forma, las grabaciones de la guitarra Yamaha C40 utilizadas en este análisis, se tomaron en la misma posición.

Para la parte del filtro de dinámica, en el algoritmo de KPS extendido, no se realizó un análisis debido a que no se construyó un dispositivo, el cual, proporcionara una fuerza constante a la guitarra real por lo que no es posible hacer un análisis con respecto a esta etapa.

5.2 Resultados:

A continuación, se presenta el espectro de la nota Mi grave, tomada de la guitarra Yamaha C40:

Figure 5-1: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, guitarra Yamaha C40

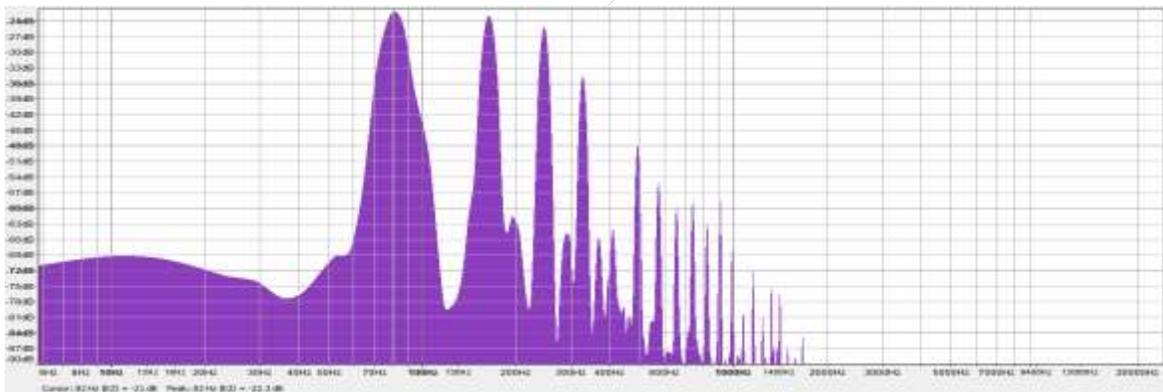


Table 5-1: Nota E2 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (Yamaha C40)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	82	164	246	327	409	491	573	655	738
Nivel (dB)	-24	-24.9	-25	-35	-64	-48.5	-55	-60	-59
F0-fk (dB)	0	0.9	1	11	40	24.5	31	36	35

Figure 5-2: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo de Kps

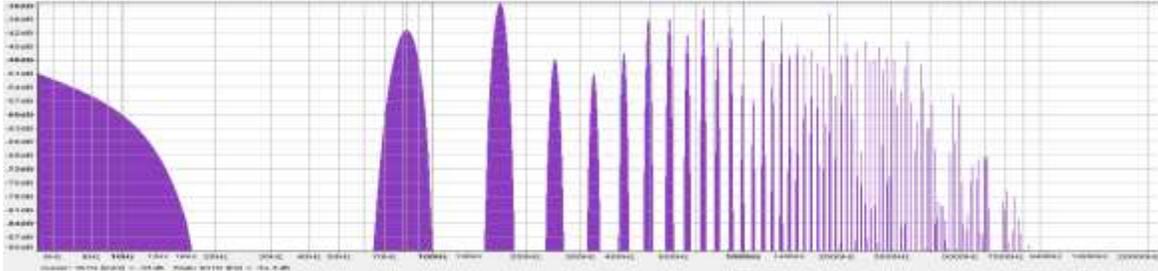
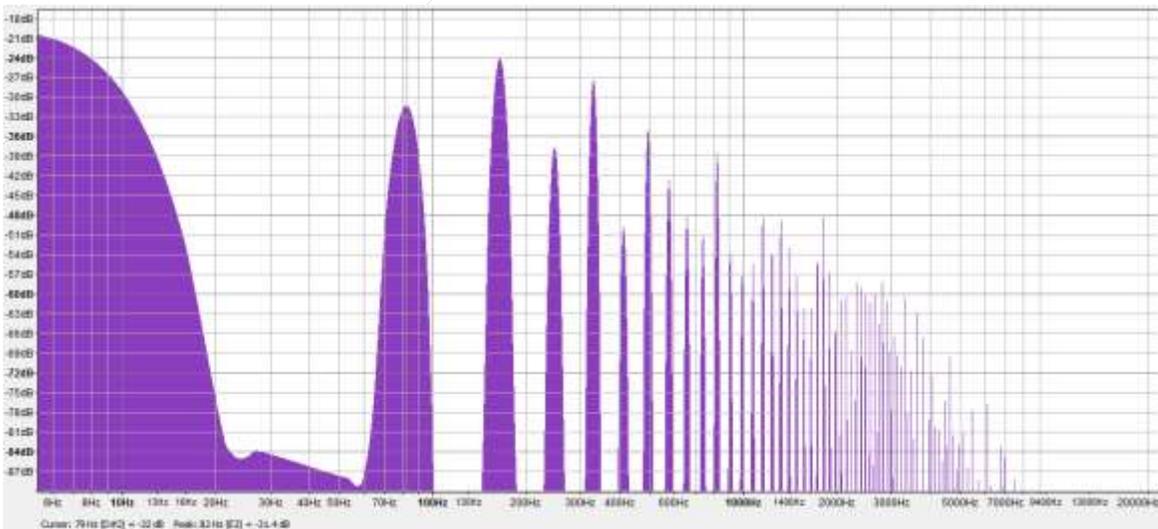


Table 5-2: Nota E2 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	83	165	248	330	413	495	578	660	743
Nivel (dB)	-41	-35.6	-47.8	-51	-46	-38.5	-38	-42	-36.6
F0-fk (dB)	0	-14.6	6.8	10	5	2.5	3	-1	-4.4

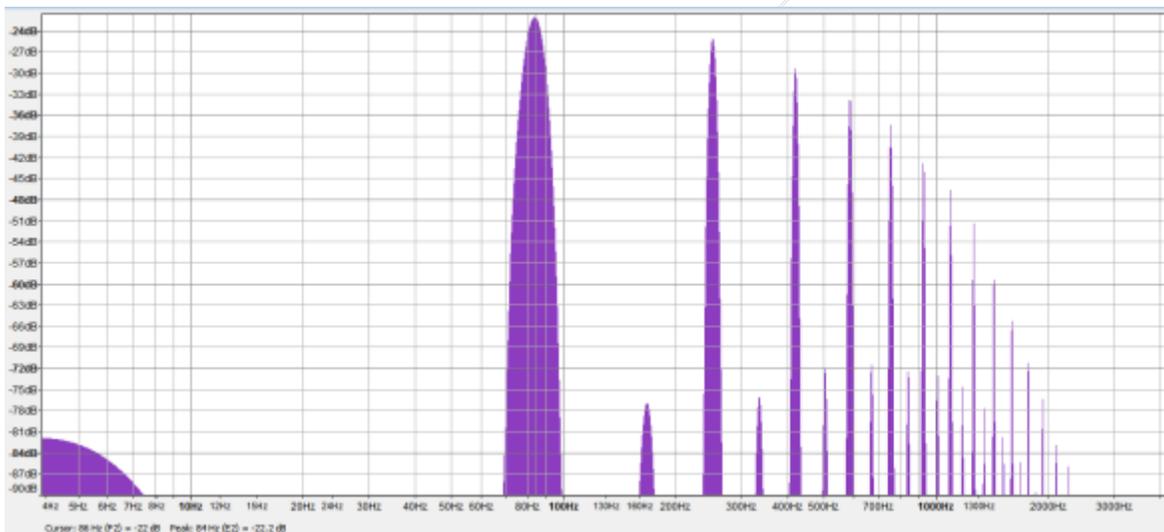
Figure 5-3: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo de Kps extendido



pulsada

Table 5-3: Nota E2 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS extendido)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	83	165	247	329	411	494	576	658	741
Nivel (dB)	-31.4	-24.3	-37.7	-27.5	-49.7	-34.9	-42.6	-48.1	-50.9
F0-fk (dB)	0	-7.1	6.3	-4.8	18.3	3.5	11.2	17.3	19.5

Figure 5-4: Espectro en frecuencia de nota Mi grave, producida por el algoritmo por Guía de onda**Table 5-4:** Nota E2 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (guía de onda)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	84	167	251	335	418	502	586	669	753
Nivel (dB)	-22.2	-76	-25.2	-75.9	-49.7	-71	-33	-71	-37.4
F0-fk (dB)	0	53.8	3	53.7	27.5	48.8	10.8	48.8	15.2

Se procede a realizar el análisis de la nota Sol (G3), siguiendo la misma posición intermedia entre el puente y la cejilla.

Figure 5-5: Espectro en frecuencia de nota Sol, guitarra Yamaha C40

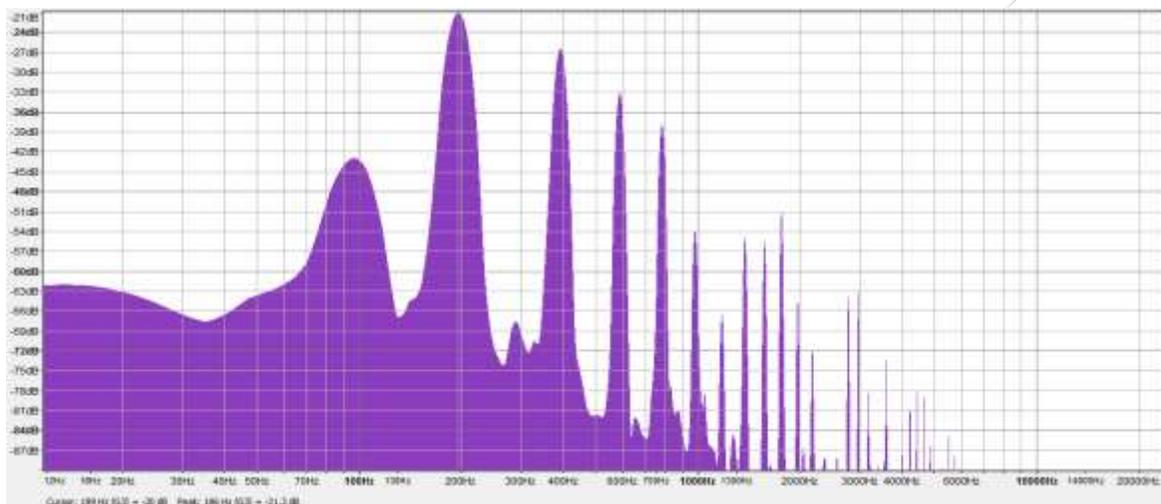


Table 5-5: Nota G3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (Yamaha)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
Nivel (dB)	-20	-25	-35.4	-40	-53.6	-66.5	-54.8	-54.4	-50.9
F0-fk (dB)	0	5	15.4	20	33.6	46.5	34.8	34.4	30.9

pulsada

Figure 5-6: Espectro en frecuencia de Sol, producida por el algoritmo de KPS

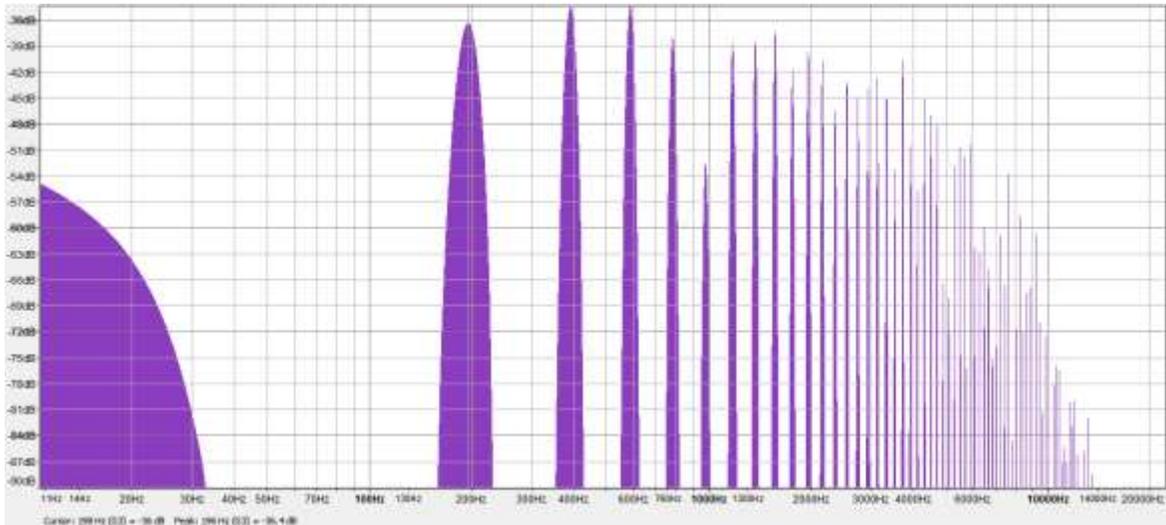


Table 5-6: Nota G3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
Nivel (dB)	-36.4	-34.5	-34.3	-38.1	-53.6	-38.4	-38.2	-37.1	-41.7
F0-fk (dB)	0	-1.9	-2.1	1.7	17.2	2	1.8	0.7	5.3

Figure 5-7: Espectro en frecuencia de Sol, producida por el algoritmo de KPS Extendido

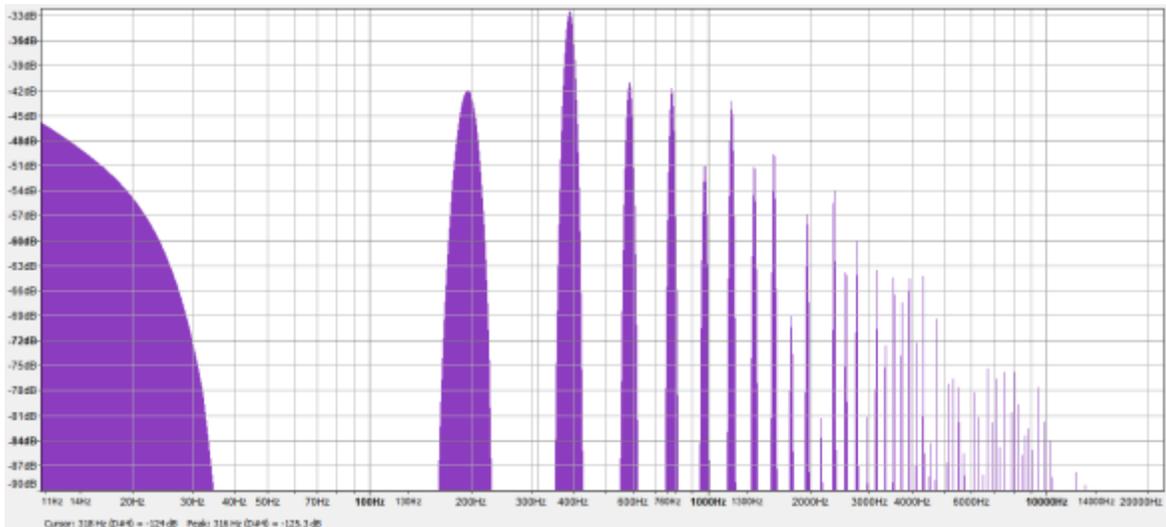
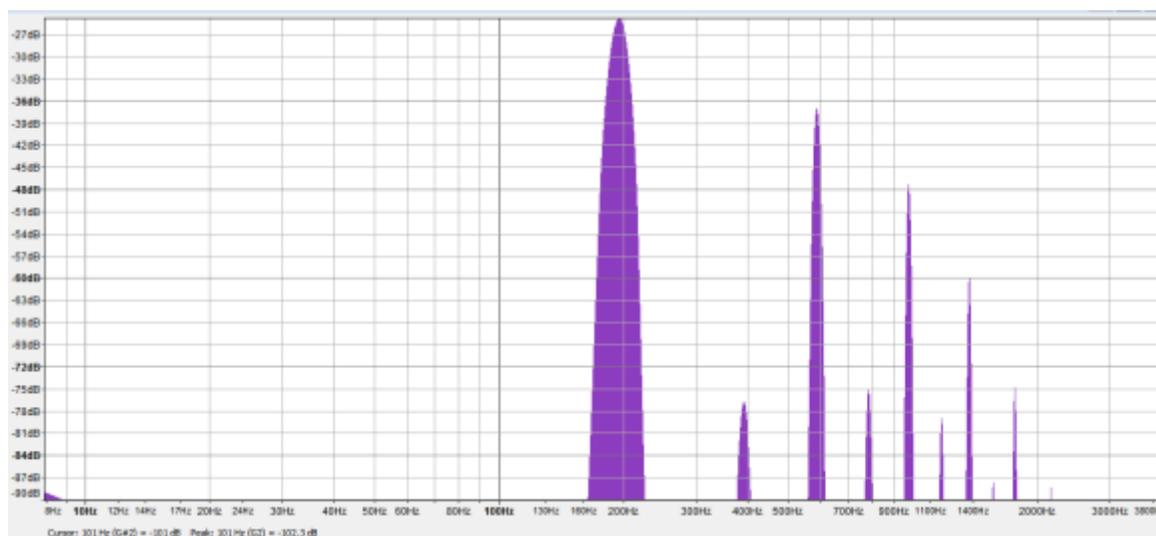


Table 5-7: Nota G3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS Extendido)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
Nivel (dB)	-42	-32.5	-41	-41.9	-50.9	-43.3	-50.8	-49.1	-68.7
F0-fk (dB)	0	-9.5	-1	-0.1	8.9	1.3	8.8	7.1	26.7

Figure 5-8: Espectro en frecuencia de Sol, producida por el algoritmo por guía de onda**Table 5-8:** Nota G3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (guía de onda)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	195	391	586	781	976	1171	1367	1562	1757
Nivel (dB)	-25	-76.6	-37	-75	-47.3	-78	-59.8	-87.3	-74
F0-fk (dB)	0	51.6	12	50	22.3	53	34.8	62.3	49

pulsada

Para finalizar, se muestran las gráficas basadas en la nota Mi aguda (E4), en la misma posición que las dos muestras anteriores:

Figure 5-9: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, guitarra Yamaha C40

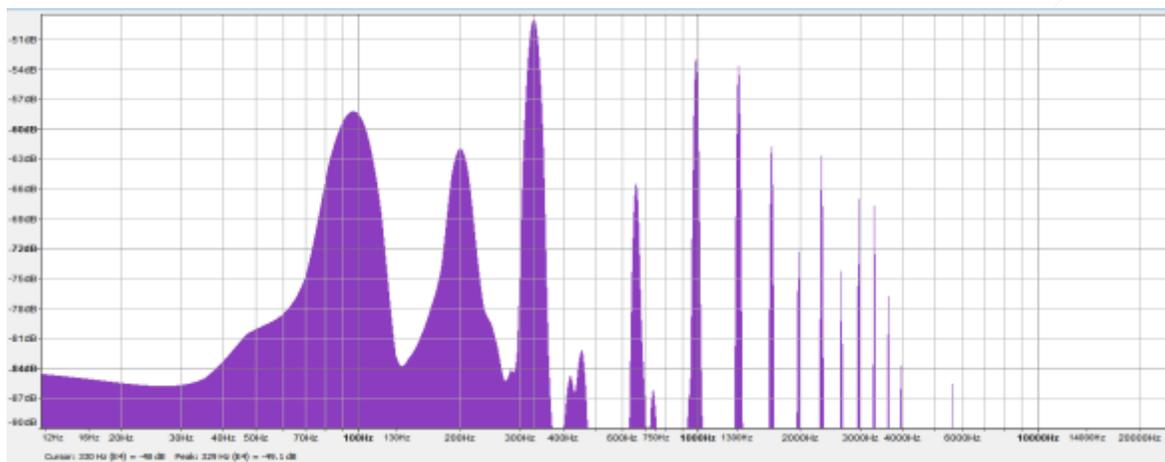


Table 5-9: Nota E4 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (Yamaha C40)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	329	657	986	1315	1645	1975	2302	2634	2962
Nivel (dB)	-49.1	-65.4	-53.9	-53.7	-61.5	-72.3	-71.8	-73.3	-66.1
F0-fk (dB)	0	16.3	4.8	4.6	12.4	23.2	22.7	24.2	17

Figure 5-10: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo de Kps

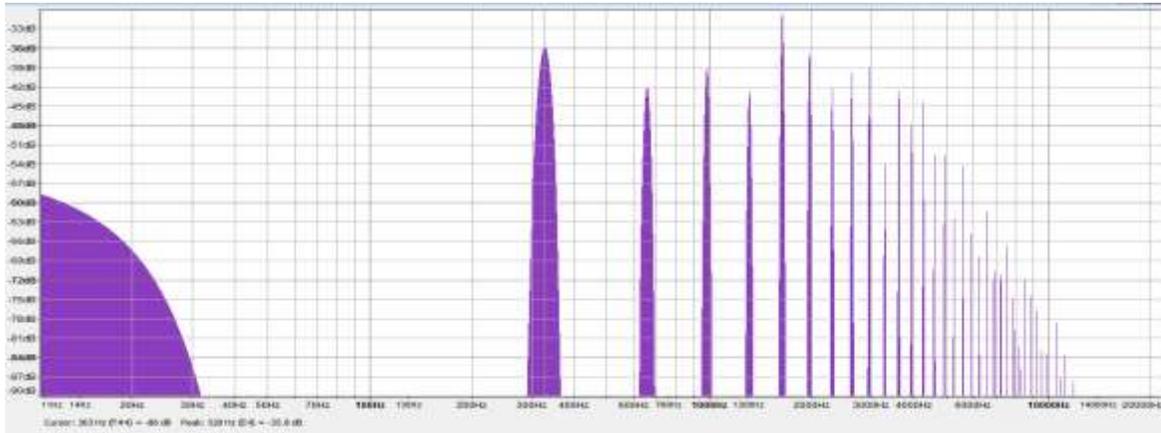
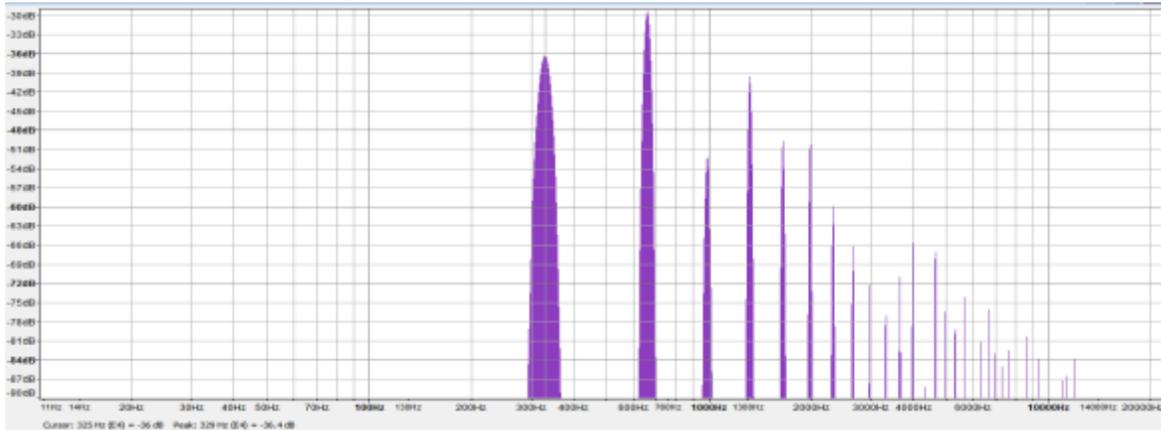


Table 5-10: Nota E4 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	328	656	984	1312	1640	1968	2295	2623	2961
Nivel (dB)	-35	-32.2	-39.4	-42	-30	-35.8	-41.5	-38.3	-37.3
F0-fk (dB)	0	-2.8	4.4	7	-5	0.8	6.5	3.3	2.3

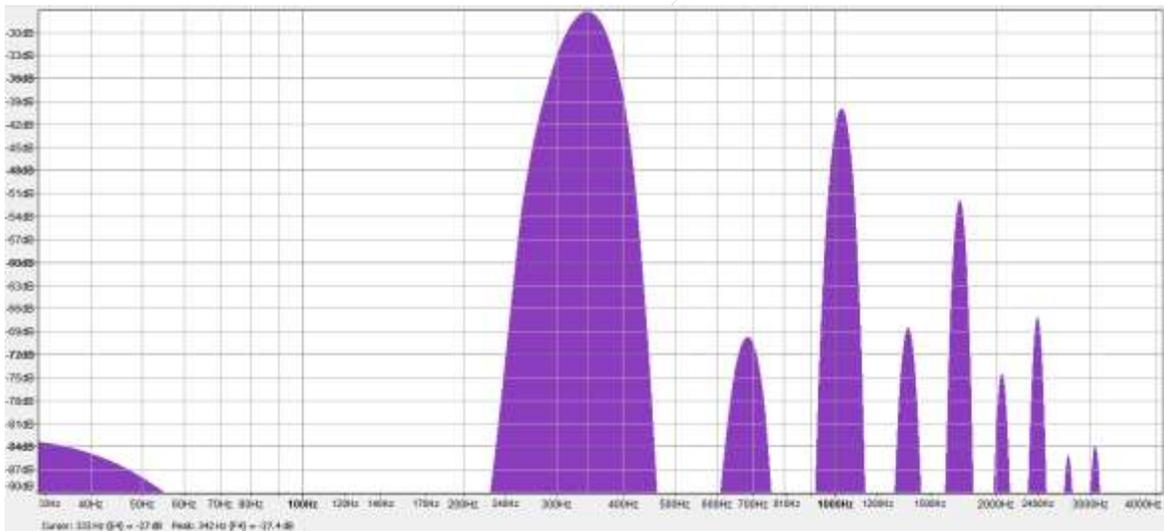
Figure 5-11: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo de Kps extendido



pulsada

Table 5-11: Nota E4 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS extendido)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	328	656	984	1312	1640	1968	2295	2623	2961
Nivel (dB)	-36.4	-29.4	-52.2	-39.6	-49.5	-48.8	-50	-59	-69.7
F0-fk (dB)	0	-7	15.8	3.2	13.1	12.4	13.6	22.6	33.3

Figure 5-12: Espectro en frecuencia de nota Mi aguda, producida por el algoritmo por guía de onda**Table 5-12:** Nota E4 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (guía de onda)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec (Hz)	342	683	1025	1367	1708	2049	2389	2728	3064
Nivel (dB)	-27.4	-69.8	-40	-68	-52	-74.4	-67.1	-85	-83

F0-fk (dB)	0	42.4	12.6	40.6	24.6	47	-94.5	57.6	55.6
------------	---	------	------	------	------	----	-------	------	------

Lo siguiente a analizar será el decaimiento o *damping*. Para ello, se llevaron los diferentes audios a Audacity donde se normalizaron a 0 dB y se suprimieron los posibles niveles DC. Posterior a esto, se cambió la visualización a dBs, donde se puede ver cuando la nota decae a -60 dB y el tiempo donde ocurre ello, el cual es llamado T60 o RT-60.

Figure 5-13: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (Yamaha C40)

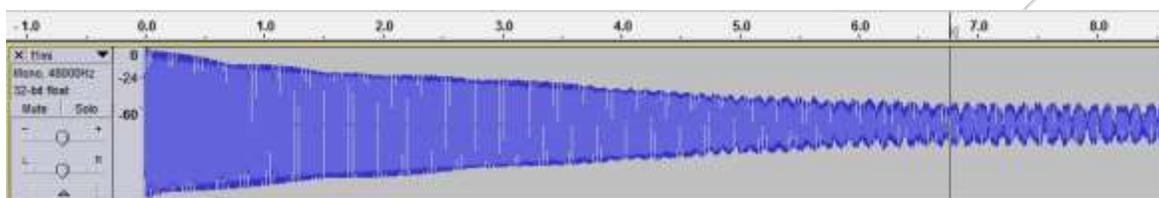


Figure 5-14: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (KPS)

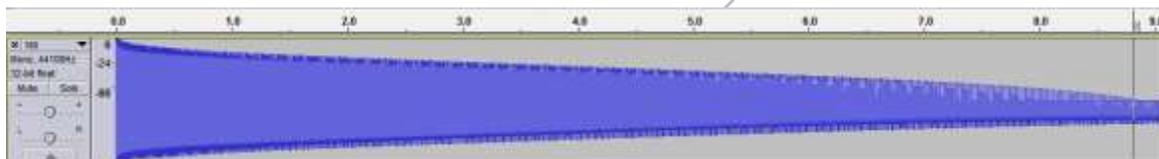


Figure 5-15: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (KPS Extendido)

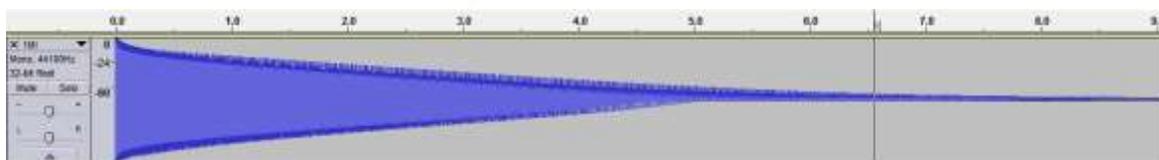


Figure 5-16: Forma de onda, expresada en dB para nota E2. (Guía de onda)

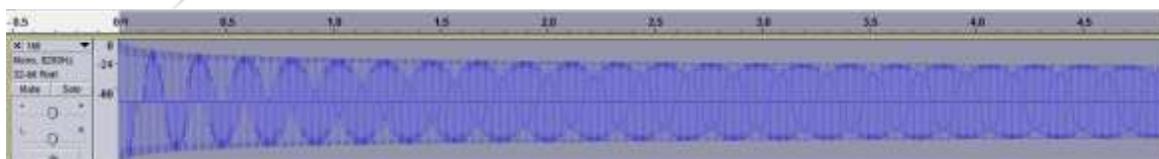


Table 5-13: T60 para la guitarra grabada y los 3 diferentes métodos utilizados para la nota E2

pulsada

	Yamaha C40	Karplus-Strong	KPS Extendido	Guía de onda
T60 (E2)	6.7 seg	8.9 seg	6.5 seg	--

Para el método de guía de onda, como se aprecia en la tabla 5-9, no tiene un valor T60 puesto que la nota nunca decae a -60 decibeles.

Figure 5-17: Forma de onda, expresada en dB para nota G3. (Yamaha C40)

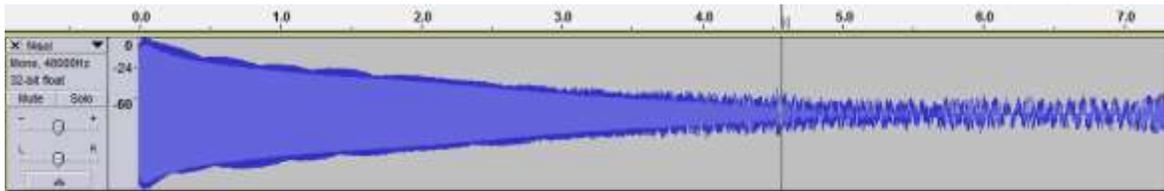


Figure 5-18: Forma de onda, expresada en dB para nota G3. (KPS)

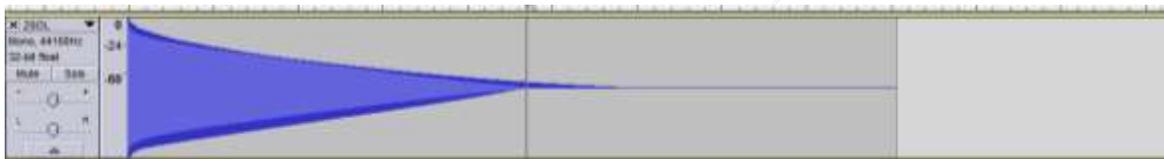


Figure 5-19: Forma de onda, expresada en dB para nota G3. (KPS Extendido)

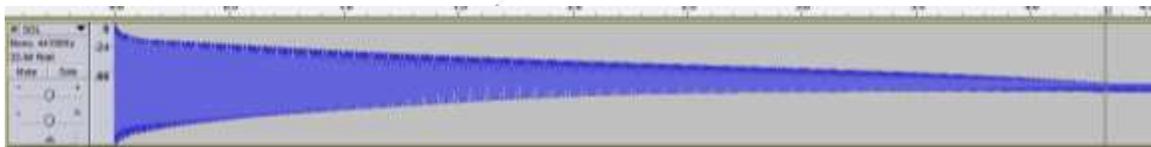


Figure 5-20: Forma de onda, expresada en dB para nota G3. (Guía de onda)

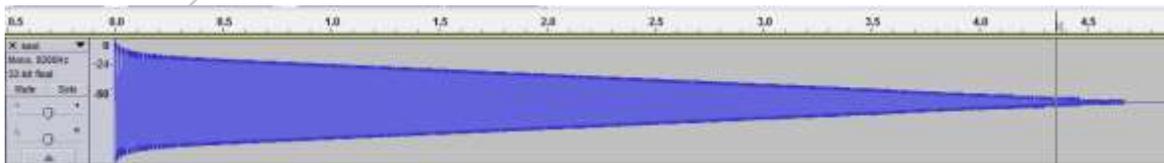


Table 5-14: T60 para la guitarra grabada y los 3 diferentes métodos utilizados para la nota G3.

	Yamaha C40	Karplus-Strong	KPS Extendido	Guía de onda
T60 (G3)	4.5 seg	4.4 seg	4.4 seg	4.3 seg

Figure 5-21: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (Yamaha C40)

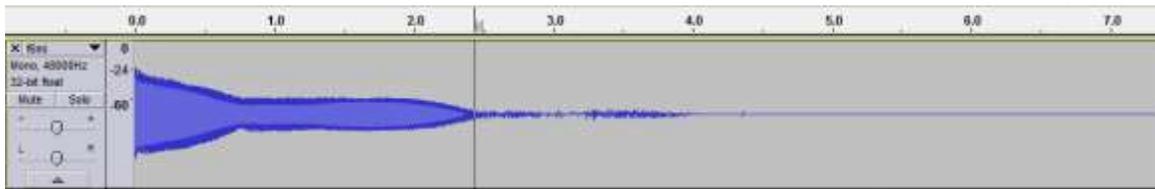


Figure 5-22: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (KPS)



Figure 5-23: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (KPS Extendido)

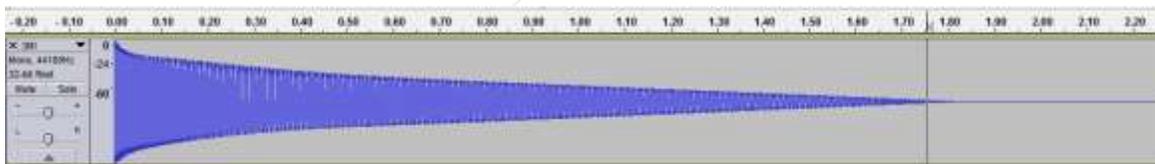


Figure 5-24: Forma de onda, expresada en dB para nota E4. (Guía de onda)

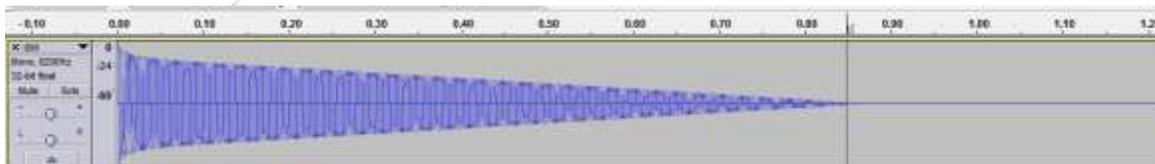


Table 5-15: T60 para la guitarra grabada y los 3 diferentes métodos utilizados para la nota E4.

	Yamaha C40	Karplus-Strong	KPS Extendido	Guía de onda
T60 (E4)	2.3 seg	1.4 seg	1.7 seg	0.8 seg

A continuación, se muestra una tabla la cual muestra el porcentaje de error con respecto a la medición del instrumento real en las 3 diferentes notas respectivamente

Table 5-16: Error de T60 con respecto a los valores del instrumento real

	Karplus-Strong	KPS Extendido	Guía de onda
T60 (E2)	0.33	0.03	/
T60 (G3)	0.02	0.02	0.02
T60 (E4)	0.4	0.26	0.65

El siguiente parámetro a analizar es la posición de pulsación y para ello, solo se tendrán en cuenta el algoritmo de Karplus-Strong extendido y el método por guía de onda (ya que el algoritmo de KPS original no puede modificar este parámetro). Se tomará para el análisis la tercera cuerda de la guitarra, Sol. Se tomaron 3 muestras en los puntos $x=0.5$, $x=0.7$ y $x=0.1$. Por motivos de extensión del documento, se analizarán los puntos extremos (0.7 y 0.1) y se podrá ver el punto intermedio en la parte de anexos

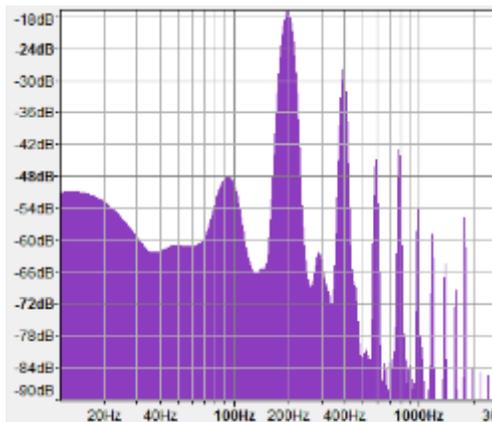


Figure 5-25: Espectro de G3 a $x=0,7$ (Guitarra)

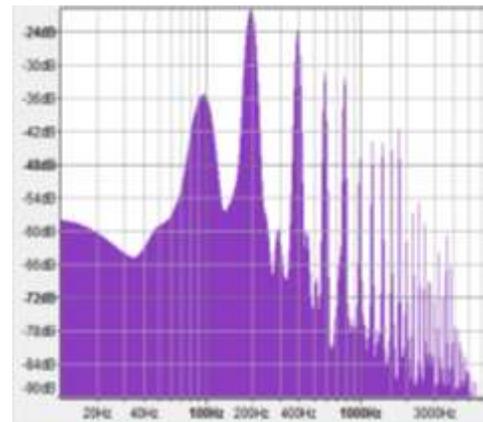


Figure 5-26: Espectro de G3 a $x=0.1$ (Guitarra)

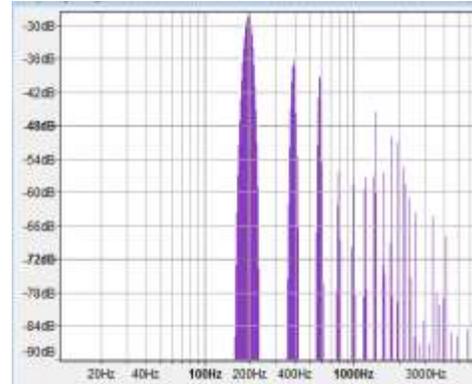
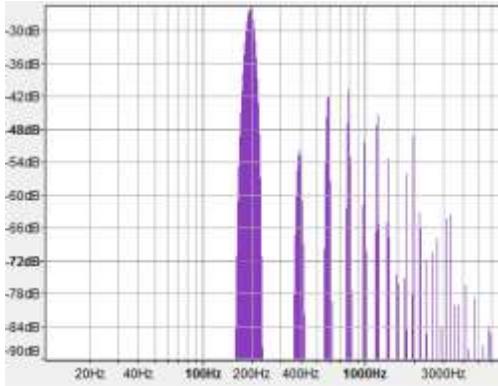


Figure 5-27: Espectro de G3 a $x=0,7$ (KPS exten.)

Figure

5-28: Espectro de G3 a $x=0,1$ (KPS exten..)

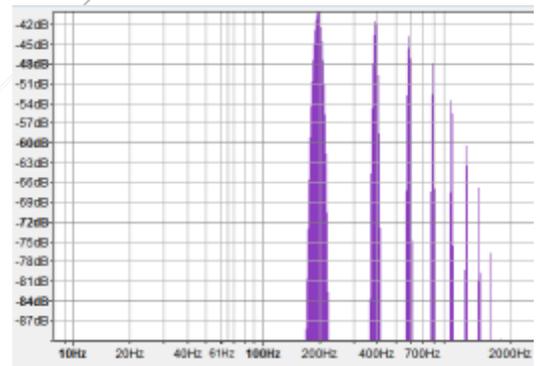
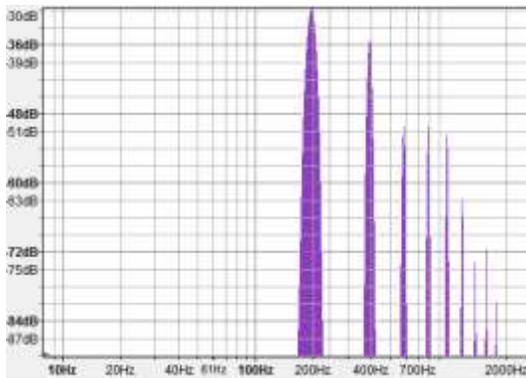


Figure 5-29: Espectro de G3 a $x=0,7$ (Guía de onda)

Figure 5-30: Espectro de G3 a $x=0,1$ (Guía de onda)

La última parte que se analizará, es el módulo que controla la rigidez en el algoritmo de Karplus-Strong Extendido. Para ello, se tomará la cuerda Mi grave (E2) interpretada en el doceavo traste (una octava, E3) y generará la síntesis del instrumento con y sin el filtro para analizar si efectivamente hay un corrimiento de los parciales.

pulsada

Figure 5-31: Espectro en frecuencia de nota Mi grave (traste 12, E3) generada por la guitarra Yamaha

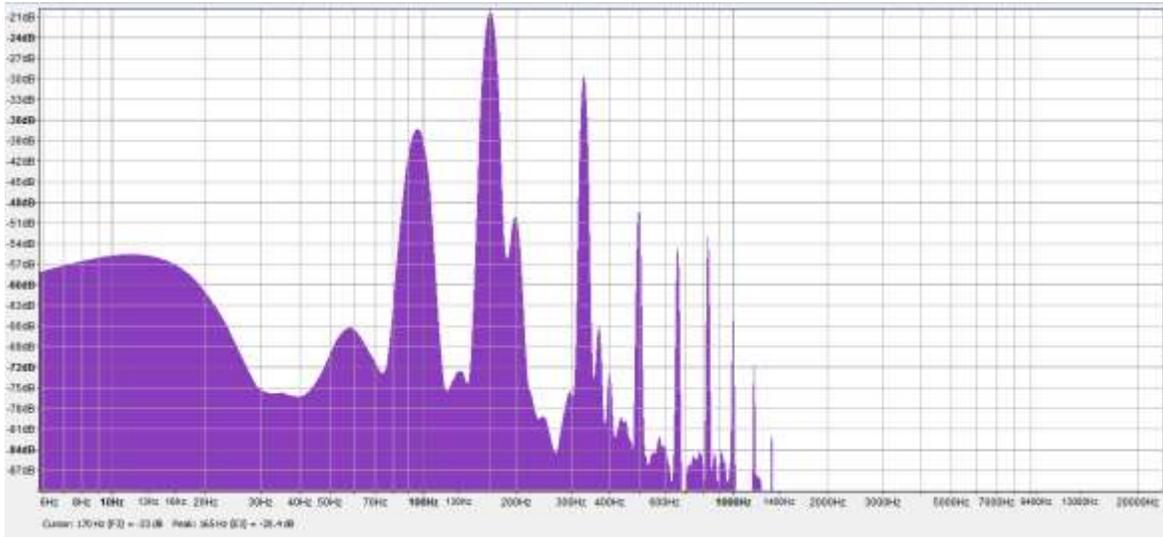


Table 5-17: Nota E3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (Yamaha)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec(Hz)	165	329	494	658	824	989	1156	1317	--

Figure 5-32: Espectro en frecuencia de nota E3 por Karplus-Strong sin filtro de rigidez

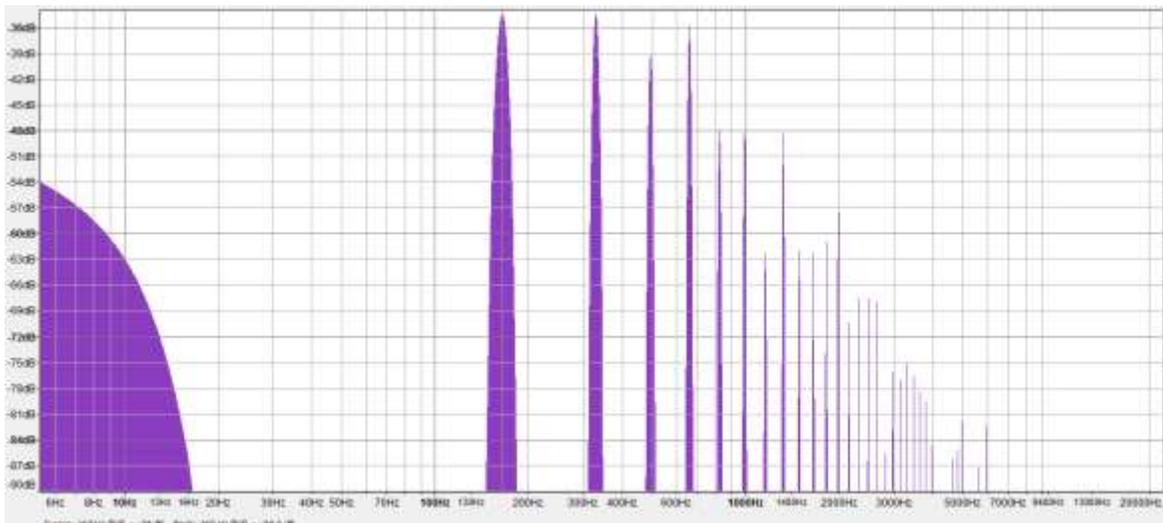


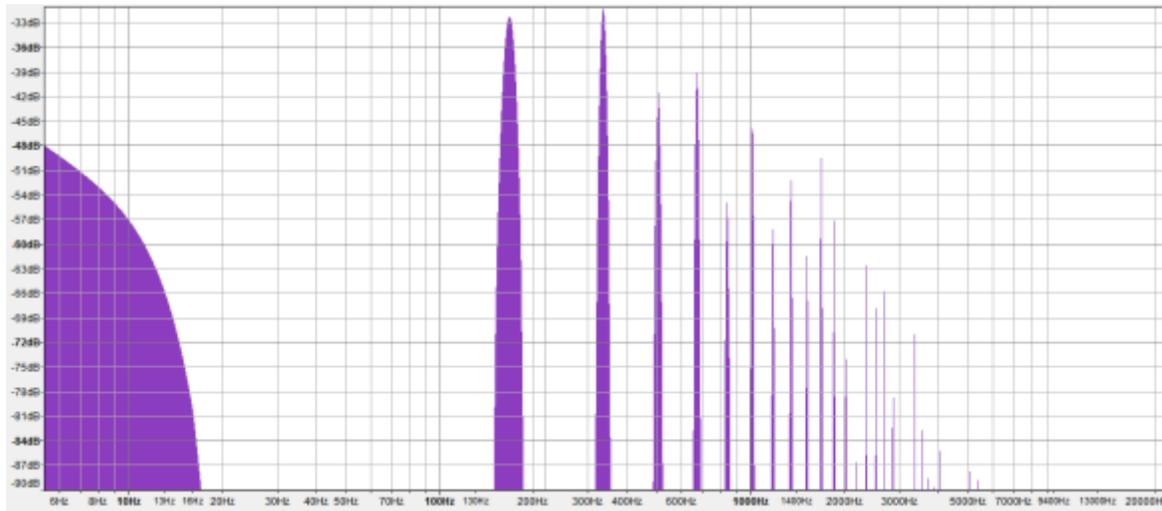
Table 5-18: Nota E3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS extendido-sin filtro de rigidez)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec(Hz)	165	329	494	659	824	989	1157	1318	1483

A partir de la ecuación 4.3.36, se tienen los siguientes los siguientes valores

Table 5-19: Parámetros obtenidos de la cuerda Mi grave interpretada en el doceavo traste

	E	d	k	l	δ
Cuerda E2	0.2 Pa6	0.53''	71.28 N	33 cm	0.0753

Figure 5-33: Espectro en frecuencia de nota E3 por Karplus-Strong con filtro de rigidez**Table 5-20:** Nota E3 con sus 8 parciales consecutivos y sus respectivos niveles (KPS extendido-con filtro de rigidez)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Frec(Hz)	168	336	504	672	840	1008	1176	1344	1512

Table 5-21: Porcentaje de error en distribución armónica para nota E2

	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8
Kps	1.2%	0.6%	0.8%	0.9%	1.0%	0.8%	0.9%	0.8%	0.7%
Kps ex.	1.2%	0.6%	0.4%	0.6%	0.5%	0.6%	0.5%	0.5%	0.4%
Guía de onda	2.4%	1.8%	2.0%	2.4%	2.2%	2.2%	2.3%	2.1%	2.0%

Table 5-22: Porcentaje de error en distribución armónica para nota G3

Kps	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Kps ex.	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Guía de onda	0.51%	0.26%	0.34%	0.38%	0.41%	0.43%	0.36%	0.38%	0.40%

Table 5-23: Porcentaje de error en distribución armónica para nota E4

Kps	0.30%	0.15%	0.20%	0.23%	0.30%	0.35%	0.30%	0.42%	0.03%
Kps ex.	0.30%	0.15%	0.20%	0.23%	0.30%	0.35%	0.30%	0.42%	0.03%
Guía de onda	3.95%	3.96%	3.96%	3.95%	3.83%	3.75%	3.78%	3.57%	3.44%

Figure 5-34: Error en frecuencia Kps

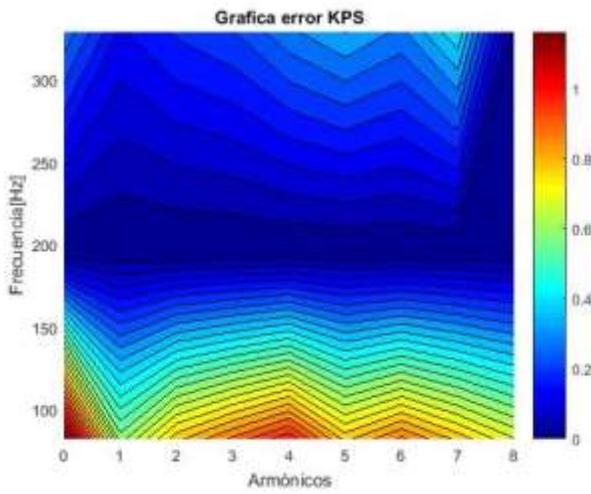


Figure 5-35: Error en frecuencia Kps ext

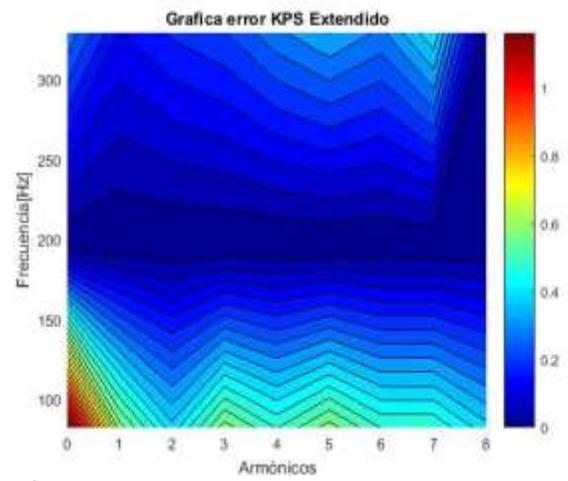


Figure 5-36: Error en frecuencia guía de onda

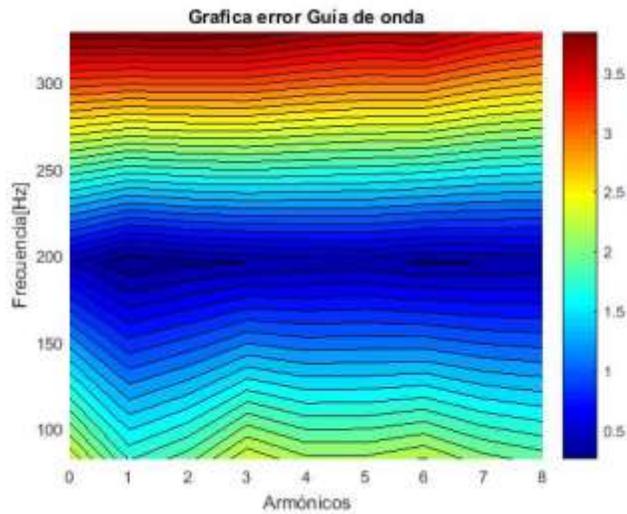


Figure 5-37: Error en amplitud Kps

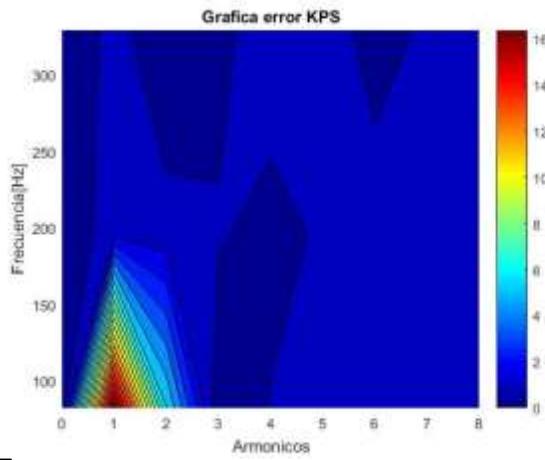


Figure 5-38: Error en amplitud Kps ex.

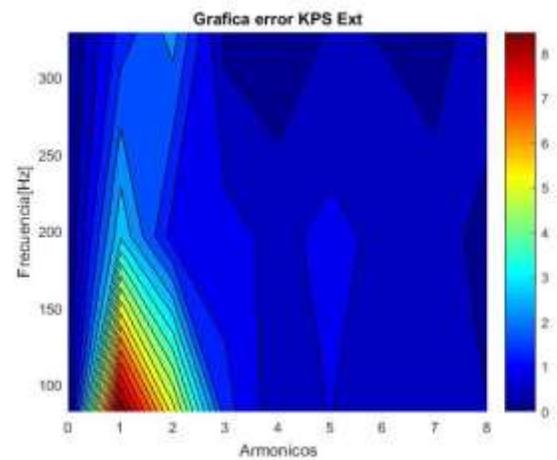
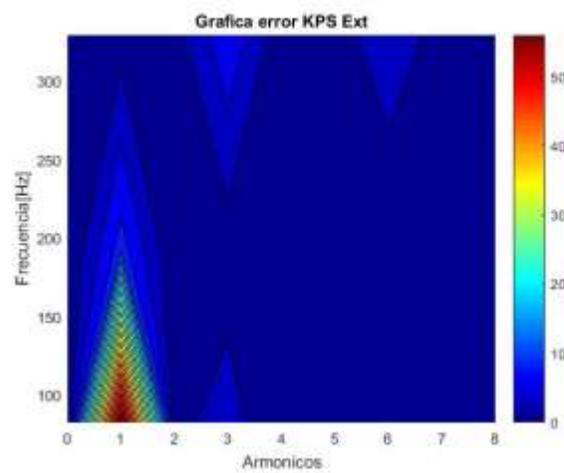


Figure 5-39: Error en amplitud guía de onda



6. Discusión de resultados

Para empezar con el análisis, hay que mencionar que los 3 algoritmos implementados, visto en las diferentes tablas por frecuencia fundamental sintetizada, cumplen con la distribución armónica de la forma $f_k=f_0*k$, donde k es el número del parcial.

Con respecto al análisis en cuanto a la distribución armónica, observando la tabla 5-22 (nota G3), nos podemos dar cuenta de que, los algoritmos de Karplus-Strong y Karplus-Strong extendido no tuvieron ningún porcentaje de error para ningún parcial, mientras que, para el algoritmo implementado por guía de onda, a pesar de que el error es mínimo, se encuentra con un error máximo de 0.51% para su nota fundamental. Cambiando a la nota Mi grave (E2), una vez más los valores de error para los algoritmos de Karplus-Strong y Karplus-Strong extendido son bastante cercanos pues haciendo un promedio de error entre los parciales, se llegó a que el algoritmo de KPS tiene un error promedio de 0.86% mientras que KPS extendido tiene un error promedio de 0.59% a diferencia de el método por guía de onda, el cual alcanza el porcentaje de error del 2.16%. En general, en el análisis de la distribución armónica, el error hasta el momento no es nada significativo, tanto subjetivamente al escuchar los audios sintetizados como los datos cuantitativos. La nota Mi aguda (E4), fue la que presentó mayor porcentaje de error para los tres métodos siendo el más notable el caso del método de guía de onda, donde solamente al escuchar el sonido del audio se puede percibir el corrimiento frecuencial y la falta de energía armónica. Lo anterior se puede evidenciar en la tabla 5-23 donde el porcentaje de error promedio es del 3.74%, que es el valor de error más alto obtenido en los 3 métodos y para las 3 frecuencias. Para la misma nota, los algoritmos KPS y KPS extendido, tuvieron el mismo comportamiento, compartiendo su porcentaje de error promedio de 0.25%.

Es pertinente mencionar que, los niveles respectivos de los parciales, no deben ser iguales a la de la grabación de la guitarra puesto que el objetivo no es emular aquella guitarra en específico, sino que, en lugar de ello, observar las diferencias entre los métodos utilizados. Se puede observar en la última fila por tabla (diferencia entre frecuencia fundamental y parciales subsecuentes) que, cuando hay valores negativos, significa que el nivel de aquel parcial se encuentra con un nivel superior que la nota fundamental. Esto se puede apreciar en los algoritmos de Karplus-Strong y Karplus-Strong extendido a diferencia del modelo por guía de onda, donde se evidencia que en los

parciales impares, existe una gran carencia de energía con relación a los parciales pares. De la misma forma, al observar las gráficas 5-38, 5-38 y 5-39, se puede evidenciar lo anterior donde el primer parcial es el que mayor porcentaje de error trae para los tres métodos.

Con respecto al tiempo de decaimiento, el algoritmo de Karplus-Strong Extendido es el que más se aproxima a la guitarra real, como se puede apreciar en la tabla 5-16, donde es el método que menos porcentaje de error tiene en las 3 notas del análisis. El método de guía de onda, tiende a tener un tiempo de decaimiento mayor en bajas frecuencias, como se observa en la tabla 5-13, donde nunca decayó a -60 dB. Por otra parte, tiene un tiempo de decaimiento mucho más rápido, en altas frecuencias, en comparación tanto como los otros dos métodos utilizados como en el instrumento real, como se aprecia en la tabla 5-15. El modelo por guía de onda, se aproximó mucho en el T60 para la cuerda Sol, donde su porcentaje de error con respecto al instrumento real fue 2%.

En general, el algoritmo de Karplus-Strong básico, no se alejó mucho de los valores del Karplus-Strong extendido, pero sigue existiendo una diferencia significativa en bajas frecuencias que es donde la síntesis del instrumento tiende a tener un decaimiento más lento, como se aprecia en la tabla 5-15 y en la gráfica 5-34.

Al analizar la parte de posicionamiento de la pulsación, se puede apreciar en la figura 5-26 que, existe una gran diferencia en la intensidad de los parciales con respecto a la figura 5-25, donde la nota es interpretada más cerca a la cejilla de la guitarra. Este mismo comportamiento se puede evidenciar en los otros dos métodos (Karplus-Strong Extendido y Guía de onda), donde haciendo uso de un filtro peine, se agregan ceros espaciados a lo largo de la línea de delay, con lo que, dependiendo de la fracción de distancia de pulsación, dará mayor o menor nivel a ciertos parciales y a sus múltiplos. En los Anexos F, se destinaron tablas en las que se compara el cambio de nivel con relación a las diferentes distancias utilizadas (0.1, 0.5 y 0.7), donde se puede apreciar que, a medida que la pulsación se acerca a los extremos, el nivel de los parciales en altas frecuencias es mayor.

Para analizar el filtro de rigidez de cuerda, es necesario regresar a la ecuación 4.2.46, con la cual se puede verificar si efectivamente este módulo cumple su objetivo de desplazar la frecuencia dependiendo del coeficiente de inarmonicidad de la cuerda

$$f_k \approx kf_0 \left[1 + \delta + \left(\frac{1 + k^2\pi^2}{8} \delta^2 \right) \right] = kf_0s(k) \quad (4.36)$$

Con los valores de la cuerda E2, interpretada en el doceavo traste, se encontró en la tabla 5-19 que, el valor del coeficiente de inarmonicidad en este caso es de 0.0753. Los valores de la frecuencia, para la nota fundamental (k=1) y sus 8 parciales consecutivos son

Table 6-1: Valores teóricos de desplazamiento de frecuencia de nota G3 por rigidez

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F(k) [hz]	166	332	498	664	830	996	1162	1328	1494

Así, es posible encontrar el porcentaje de error entre la tabla 5-20, donde se encuentra que el error es de 1.2% para la nota fundamental y para todos su parciales. Este porcentaje de error es muy bajo, por lo que puede ser despreciable y poder asegurar que el filtro está cumpliendo su función sin afectar el timbre del sonido sintetizado.

7. Conclusiones y recomendaciones

7.1 Conclusiones:

Se logró llegar a una gran similitud entre la guitarra Yamaha C40 y los tres algoritmos implementados en aspectos como decaimiento y distribución armónica, lo que sirvió mucho al momento de determinar si los métodos utilizados actúan de forma realista con respecto a cómo se comporta el instrumento real.

Fue posible reunir gran parte de información encontrada en diversos artículos para el diseño y la implementación de los algoritmos de Karplus-Strong, Karplus-Strong Extendido y el modelo por Guía de onda, donde se explicó todo el proceso teórico hasta llegar a la síntesis del instrumento.

Es difícil saber cuál algoritmo es mejor que otro, puesto que las comparaciones realizadas con respecto al instrumento real solo servían de guía para conocer el comportamiento de este. Sin embargo, para responder la pregunta problema, el algoritmo de Karplus-Strong extendido, fue el que más se aproximó a los valores de la guitarra Yamaha C40, con un porcentaje máximo de distribución armónica de 0.56% y un 0.26% máximo de error para decaimiento, por lo que es el que representa de forma más fiel los fenómenos físicos inmersos en la teoría de cuerdas en vibración. Lo anterior se puede corroborar tanto en la parte de decaimiento por frecuencia (tabla 5-16), donde el porcentaje de error es muchos más pequeño en comparación a los otros dos métodos y en su distribución armónica, donde todos los métodos se aproximaron, pero éste tiene una mayor precisión.

El algoritmo de Karplus-Strong original, puede ser una gran opción para este tipo de síntesis pues, a pesar de ser un método computacional muy sencillo, tiene una gran semejanza al comportamiento del instrumento real. Sin embargo, al no poder manipular parámetros como en los otros dos métodos, puede limitarse bastante al momento de buscar un timbre en específico.

El modelo realizado por guía de onda, es el que es más rápido al momento de realizar la síntesis computacionalmente pues solo tiene un ciclo al interior del algoritmo. Este puede ser una buena opción para frecuencias medias, como se aprecia en la tabla 5-14, donde su tiempo de decaimiento es coherente y su distribución armónica es rica en armónicos.

Se puede afirmar que, se cumplió con el objetivo general de sintetizar de forma realista el sonido de un instrumento de cuerda pulsada pues, como se observó en la sección de análisis de resultados, los resultados obtenidos cumplen con los fenómenos físicos de la guitarra real, donde es posible manipular los parámetros de los algoritmos para encontrar un comportamiento tímbrico deseado.

7.2 Recomendaciones:

Al momento de recolectar toda la información al respecto de síntesis por modelado físico y modelos de guías de onda, se encontraron otros aspectos que pueden ser modelados a futuro, como lo son los casos de interpolación o el caso de cuerdas simpatéticas, donde sería posible la realización de acordes en esta síntesis.

Otro aspecto que puede tratarse como un estudio posterior es el de realizar este tipo de síntesis en tiempo real, que fue una limitante enorme en los primeros avances de investigación pues para la época no existían computadores que pudieran realizar este tipo de cálculos de forma tan rápida como se podrían hacer en estos días.

Referencias

D'Alembert. (1747). *L'Encyclopédie*. Francia.

Gutiérrez, E. G. (2009). Introducción al filtrado digital.

Hiller, L., & Ruiz, P. (1971). Synthesizing Musical Sounds by Solving the Wave Equation for Vibrating Objects.

Hodgkinson, M. (2010). A Model of Partial Tracks for Tension-Modulated Steel-String Guitar Tones.

Jaffe, S. (1983). Techniques for Digital Filter Design and System Identification with Application to the Violin.

Jimenez, F. (2000). Guitarra Sintetizada Usando el Modelo de Karplus-Strong.

Julius O. Smith, D. A. (1983). *Extensions of the Karplus-Strong Plucked String Algorithm*.

Karplus, K., & Strong, A. (1983). Digital synthesis of plucked string and drum timbres.

Laakso, V. K. (1996). Splitting the Unit Delay - Tools for Fractional Delay Filter Design.

M, S., & Lee, B. H. (2006). Real-time Digital Signal Processing. 666.

Miranda, E. R. (2002). Computer Sound Design: Synthesis Techniques and Programming.

Morse, P. (1936). Vibration and Sound.

Moya, P. (2011). *Procesamiento Digital de Senales*.

Sampieri, c. P. (2010). *Metodología de la investigación*. Mexico: Mc Graw Hill.

Smith, J. (December de 2010). *Physical Audio Signal Processing*. Obtenido de <https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/>

Smith, K. V. (1993). *Towards High-Quality Sound Synthesis of the Guitar and String Instruments*.

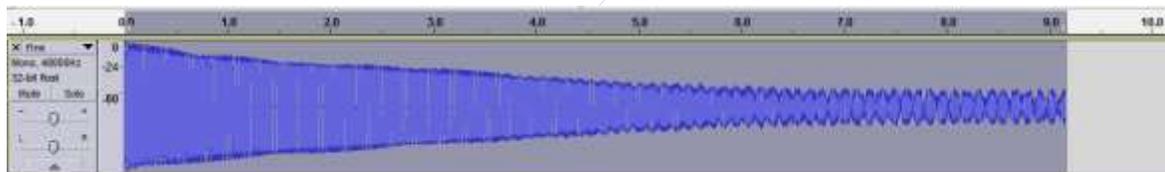
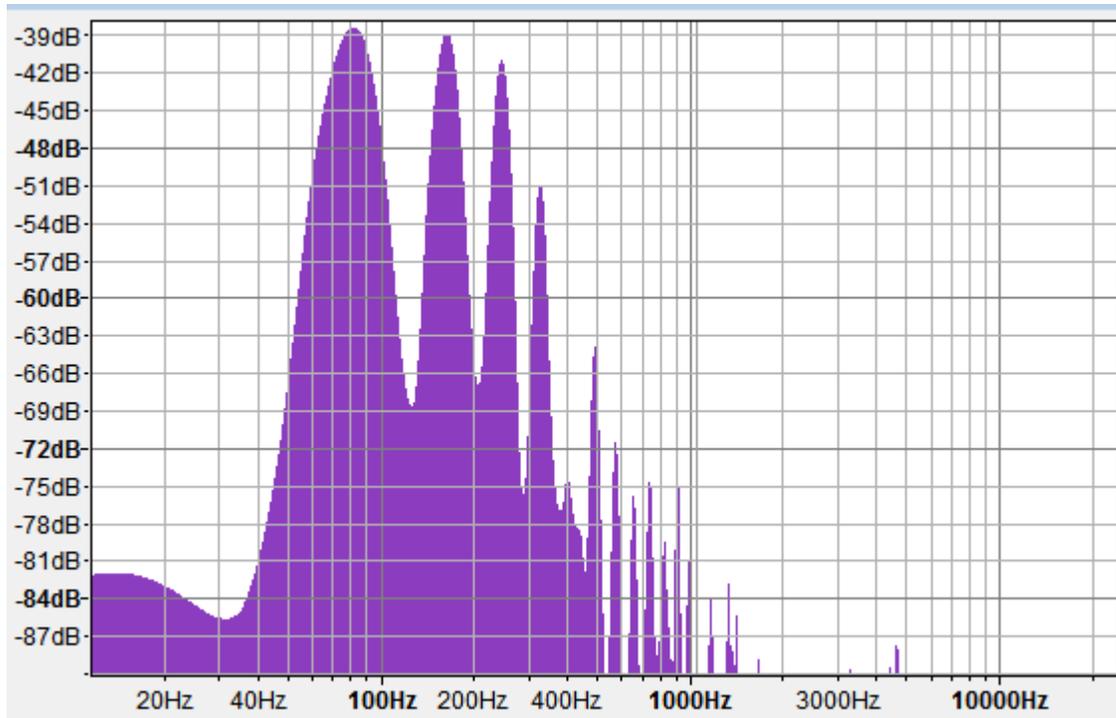
Välimäki, V. (1994). *Analysis and Synthesis of the Piano Sound*.

8. Anexos

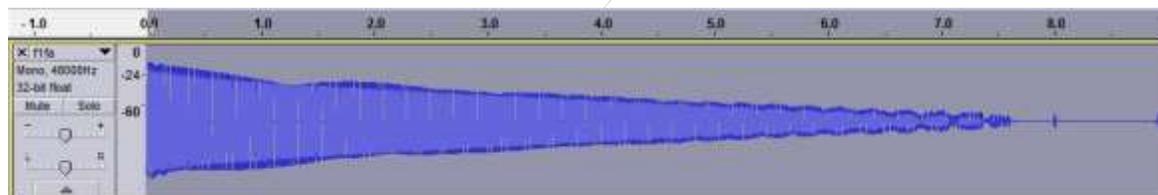
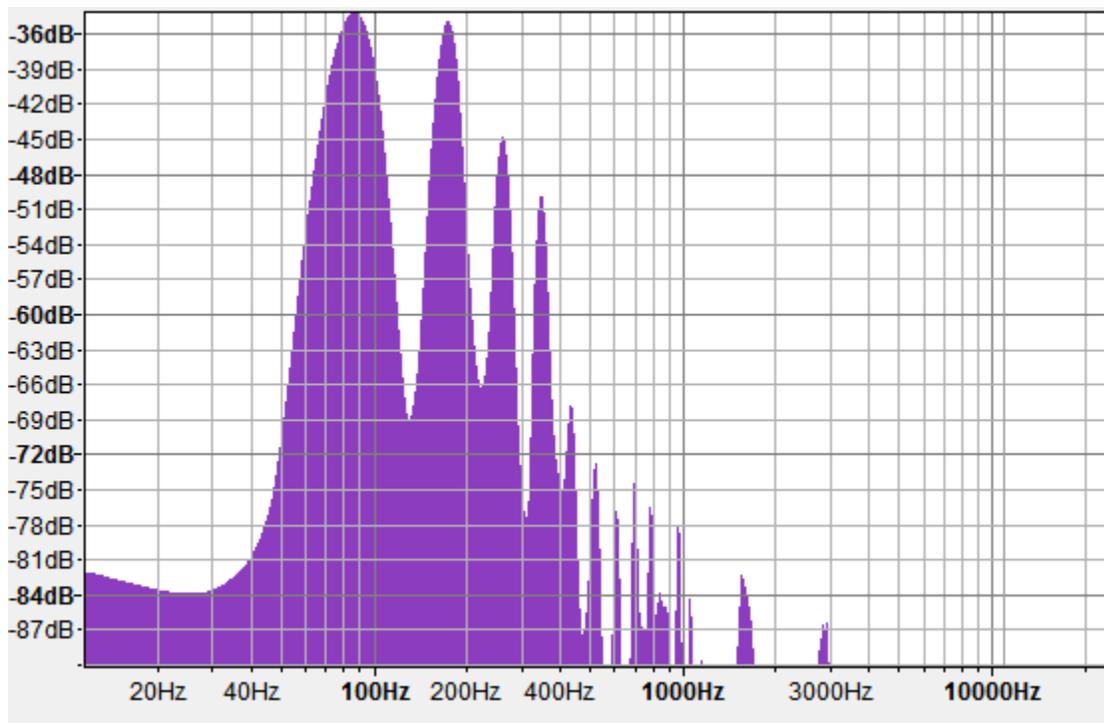
A. Anexo: Grabaciones de Yamaha C40 (Forma de onda en dBs y espectro)

Nota E2

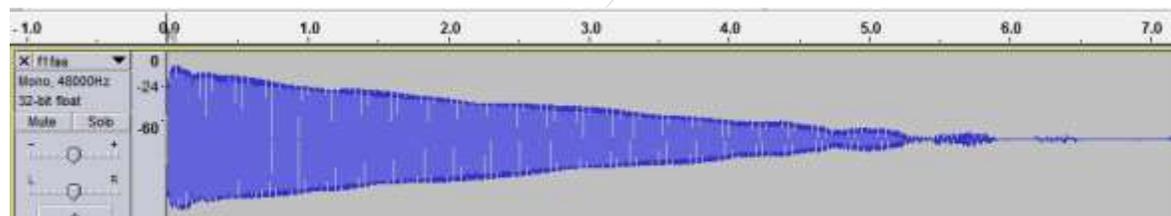
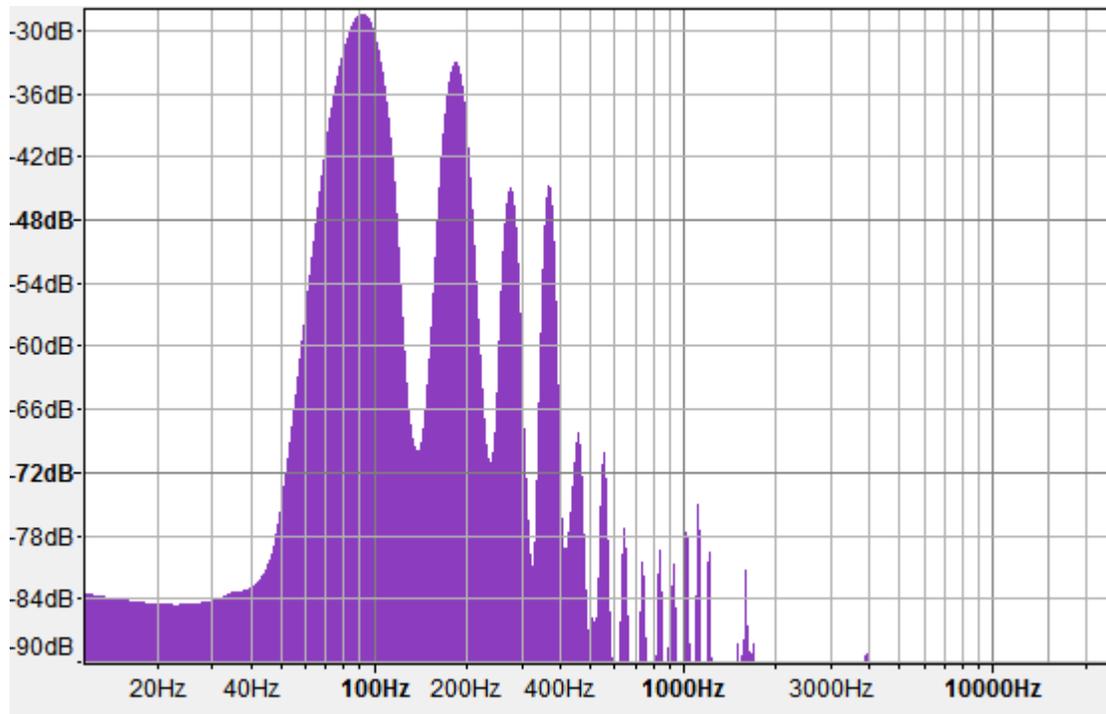
pulsada



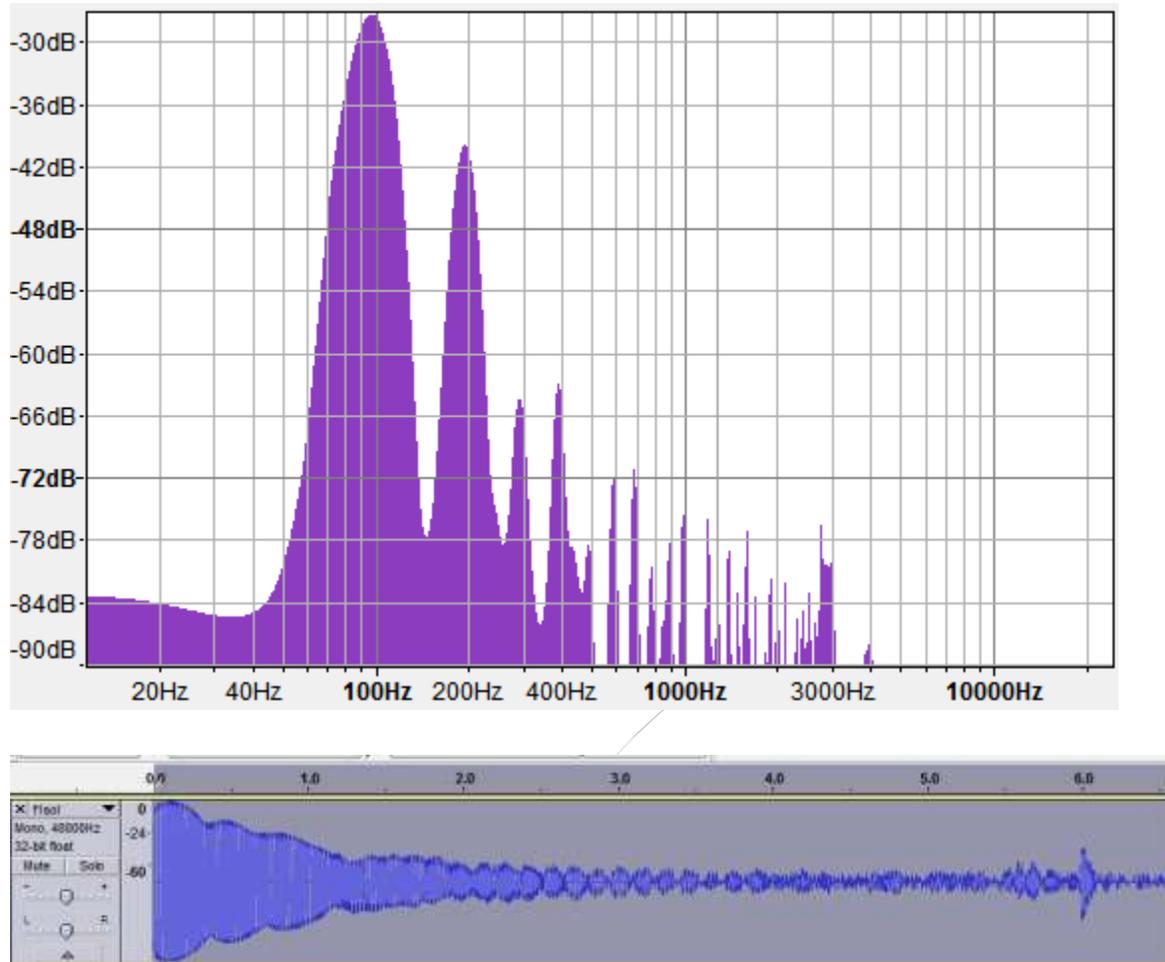
Nota F2



Nota F#2

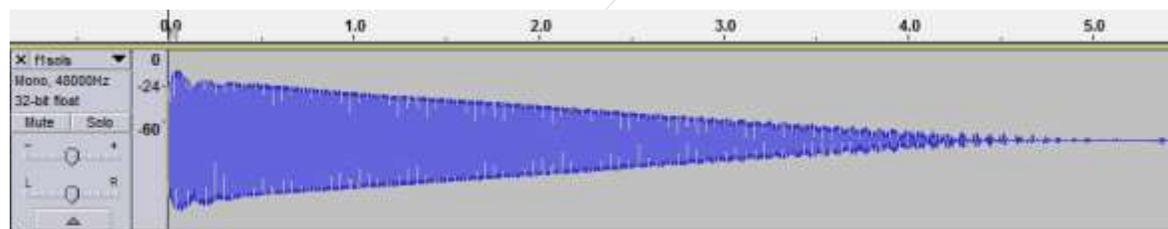
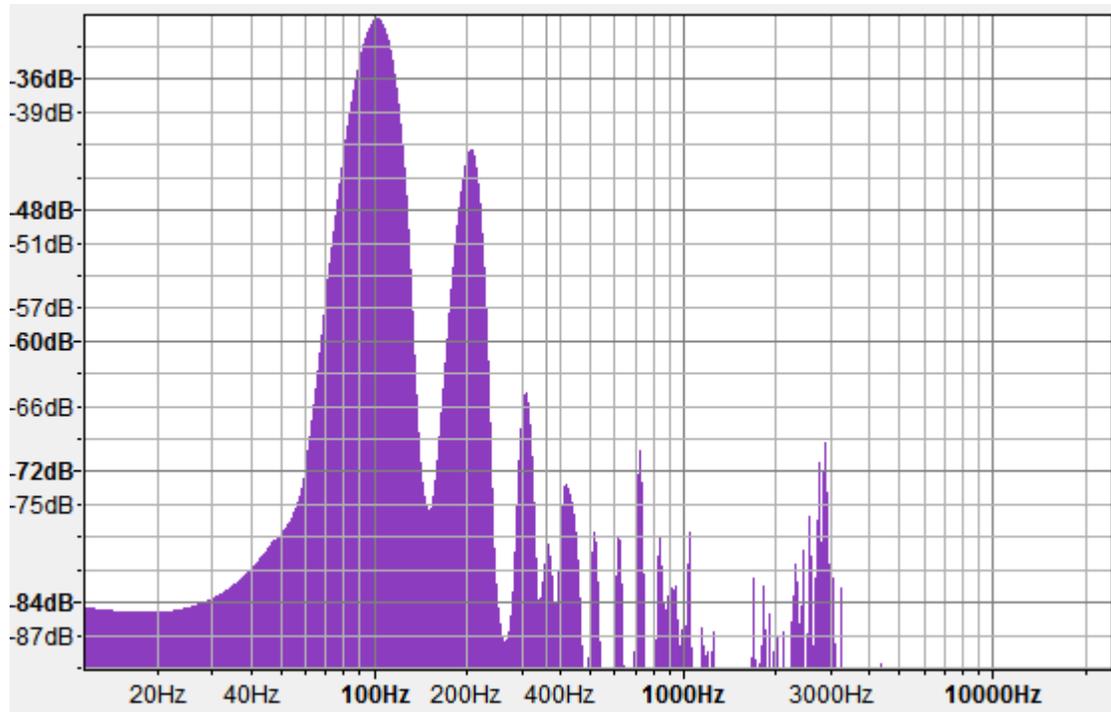


Nota G2

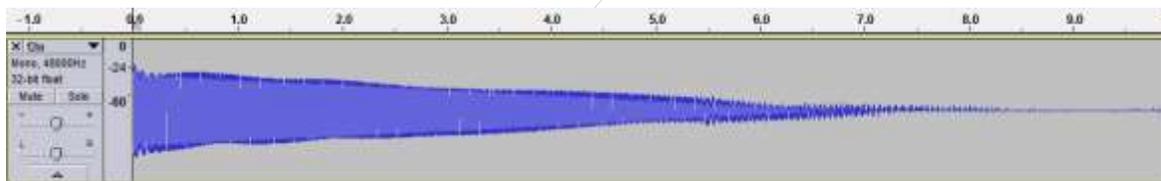
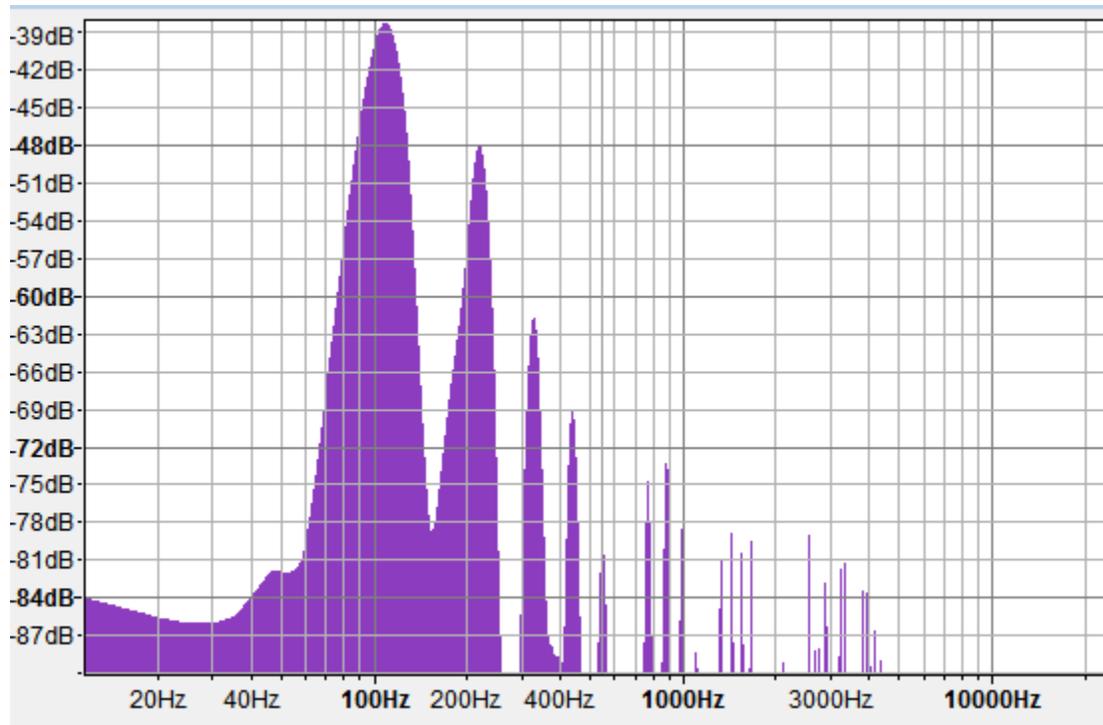


Nota G#2

pulsada

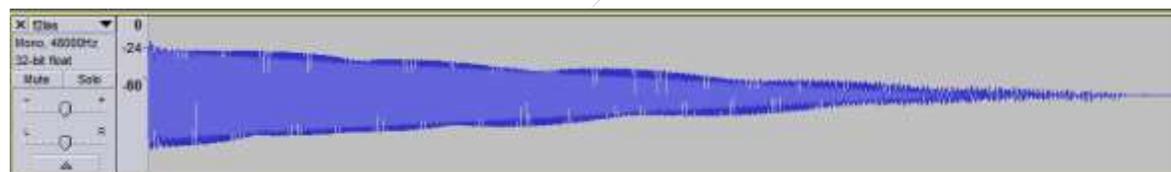
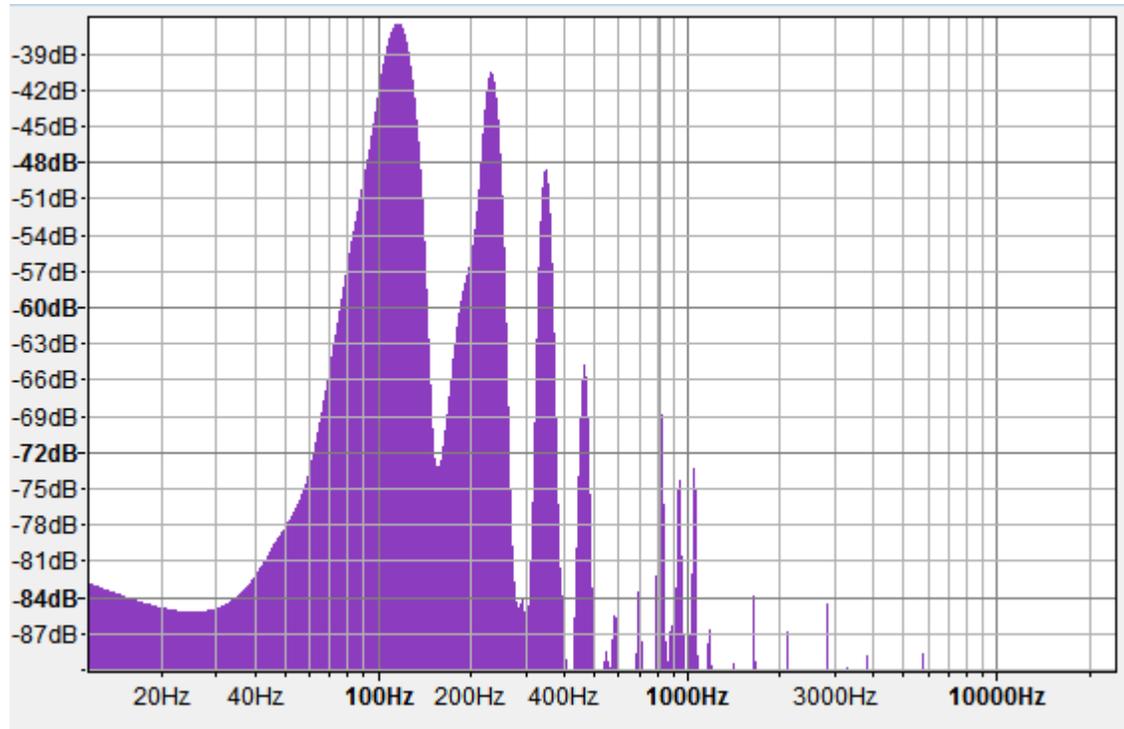


Nota A2

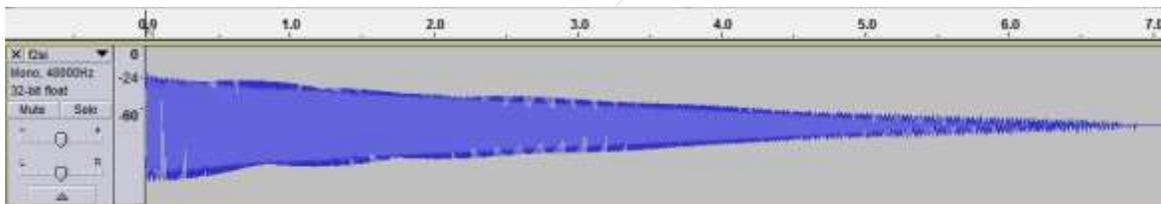
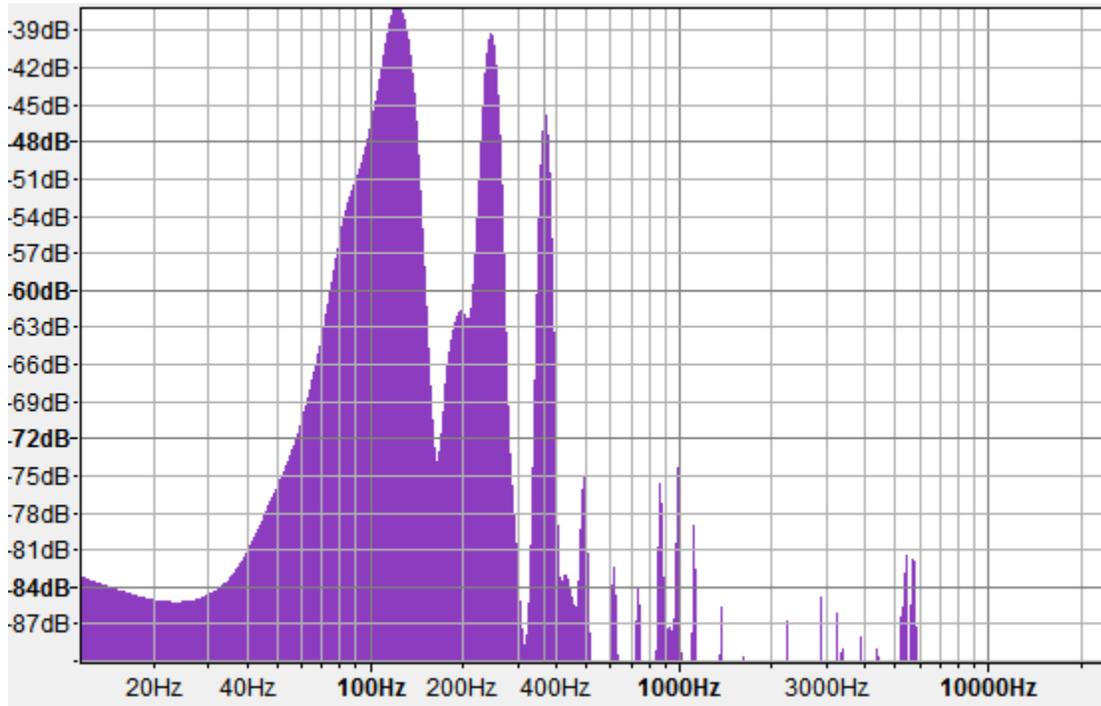


Nota A#2

pulsada

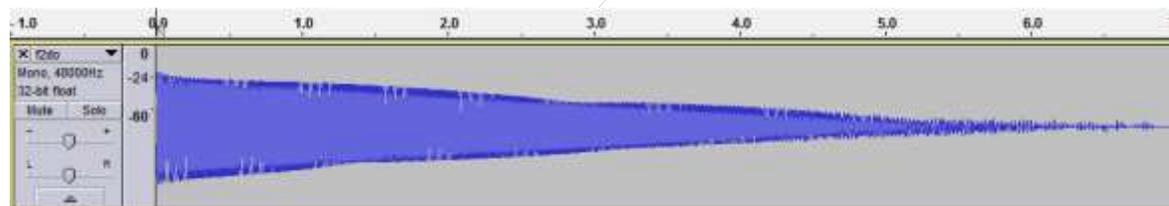
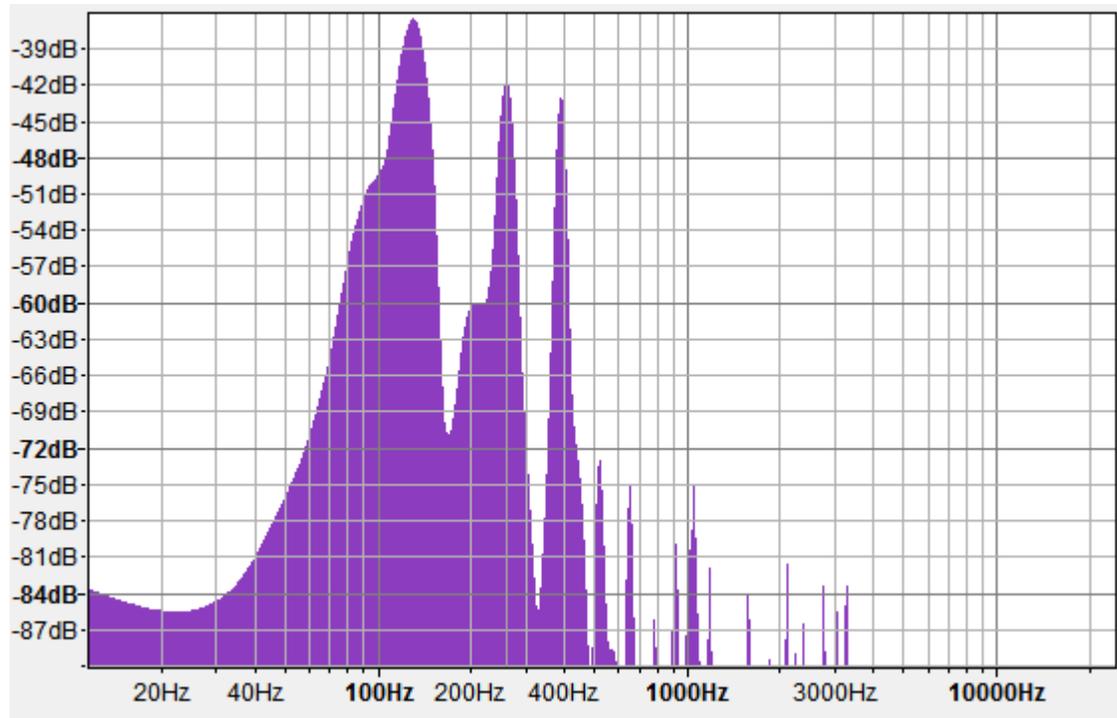


Nota B2

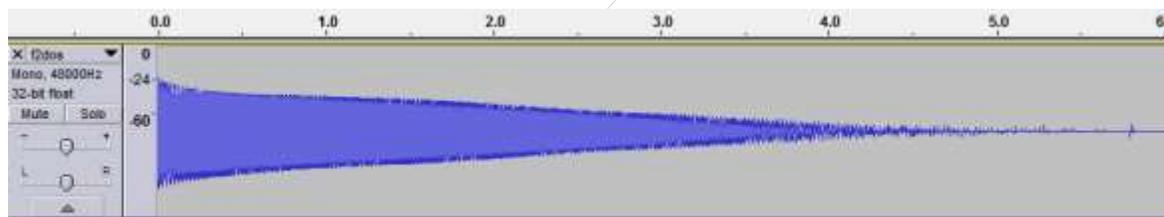
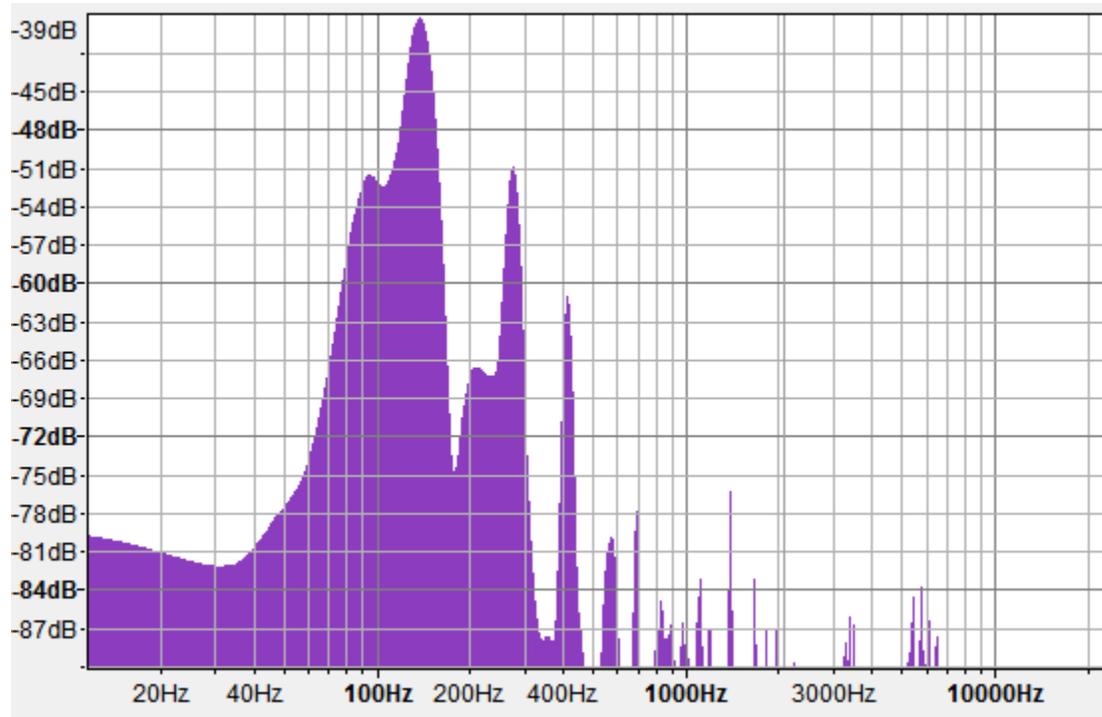


Nota C3

pulsada

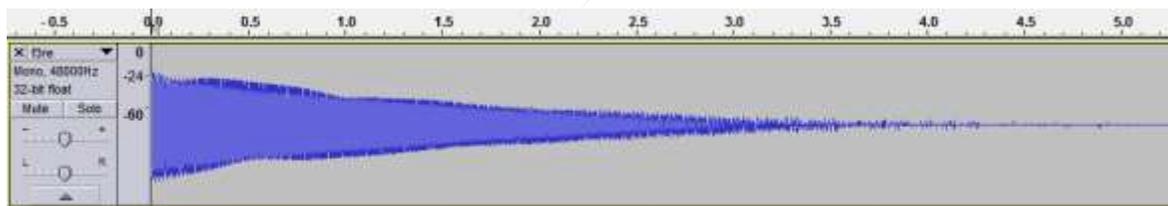
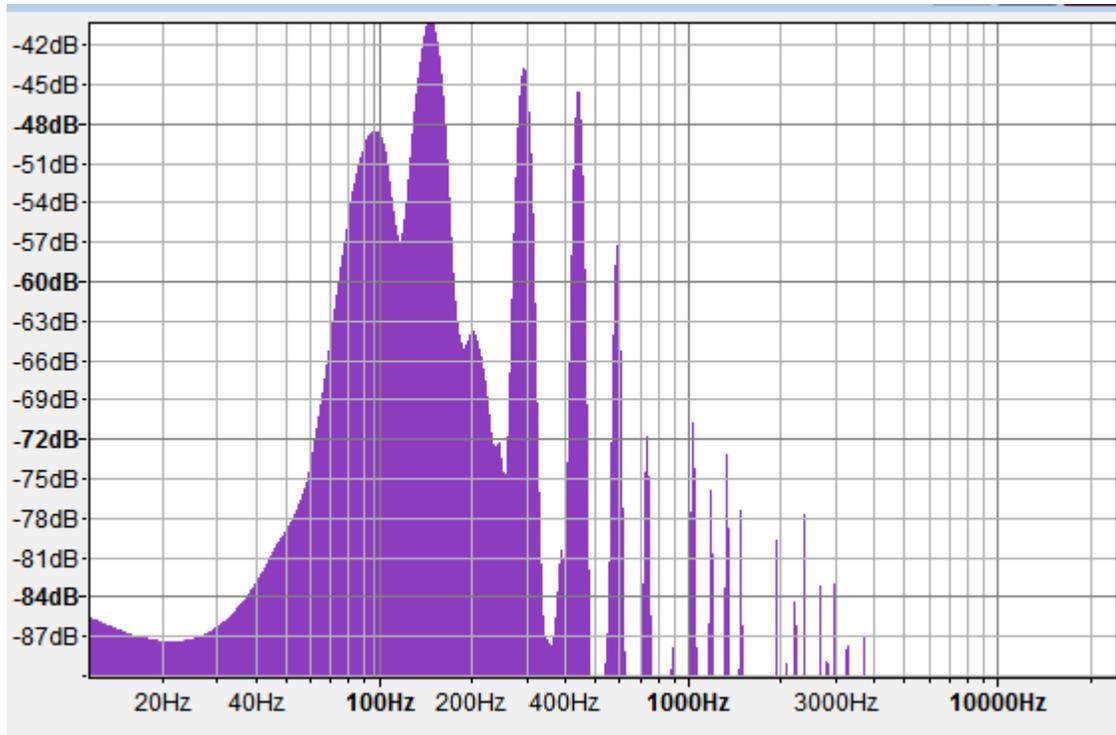


Nota C#3

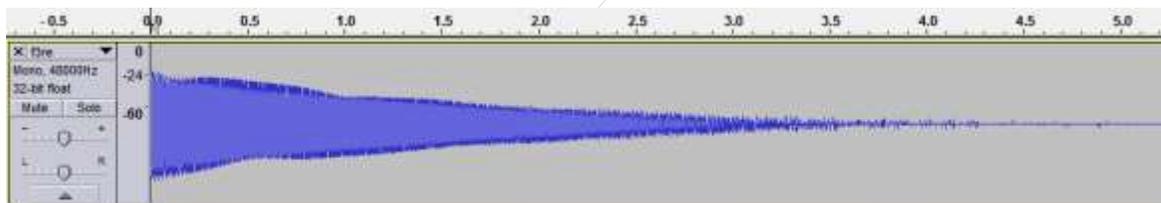
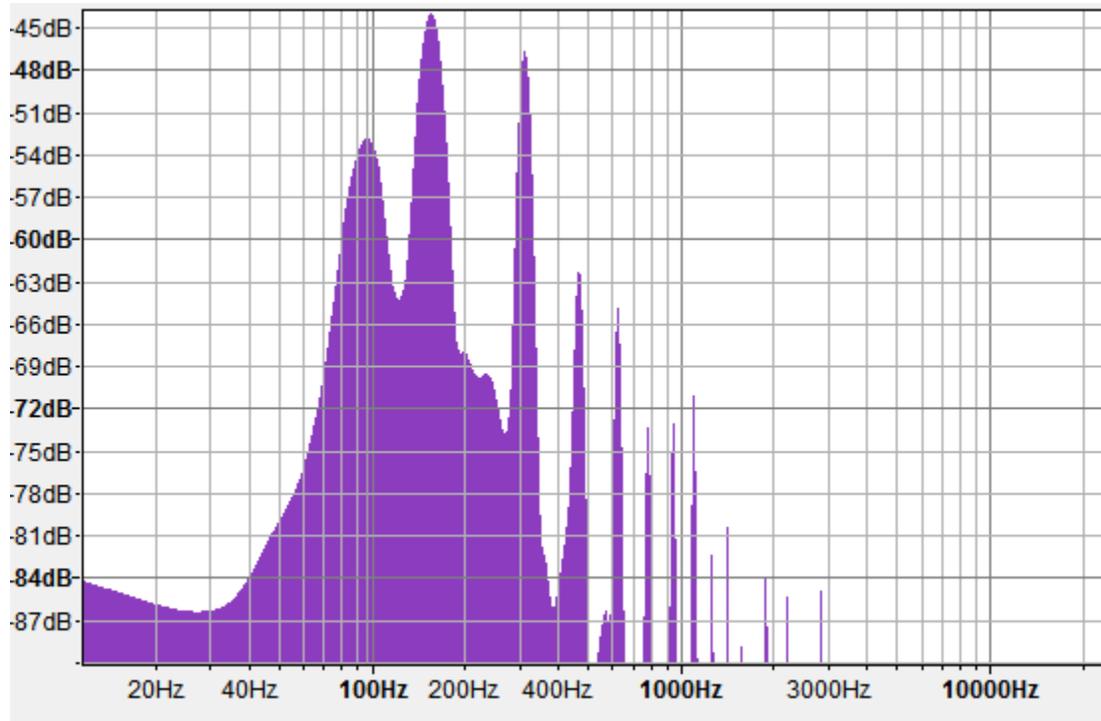


Nota D3

pulsada

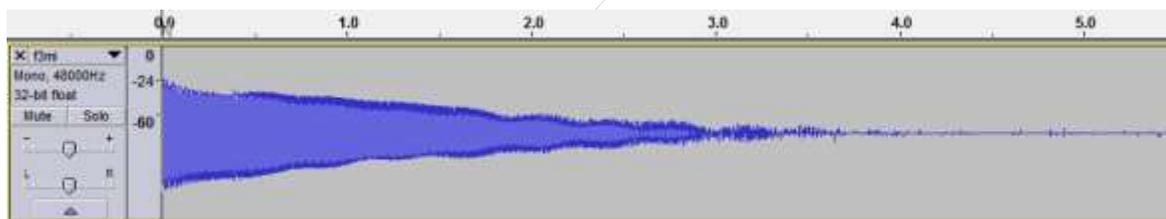
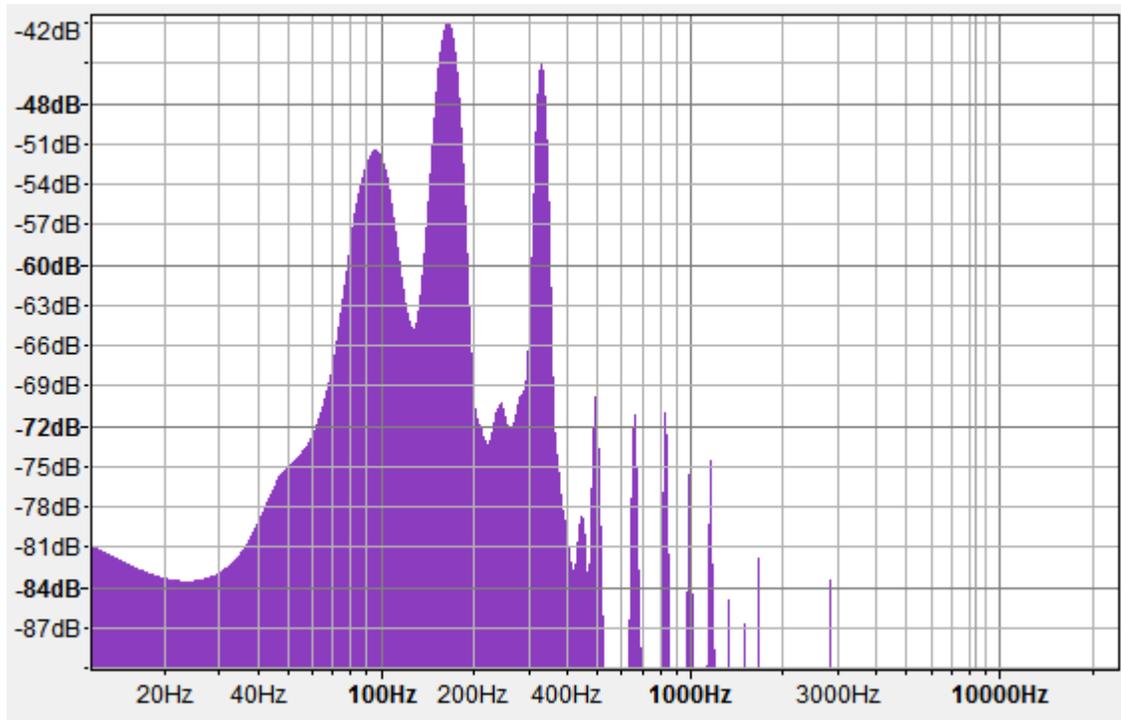


Nota D#3

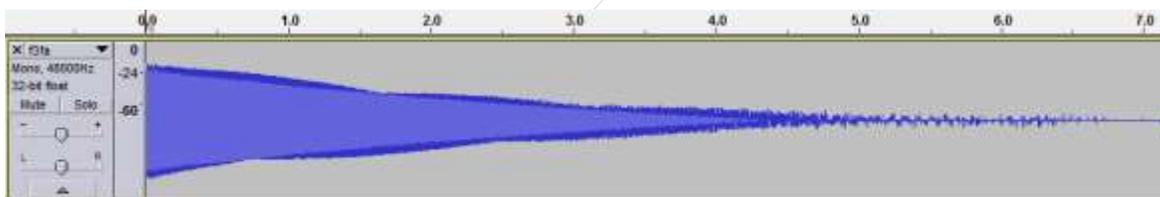
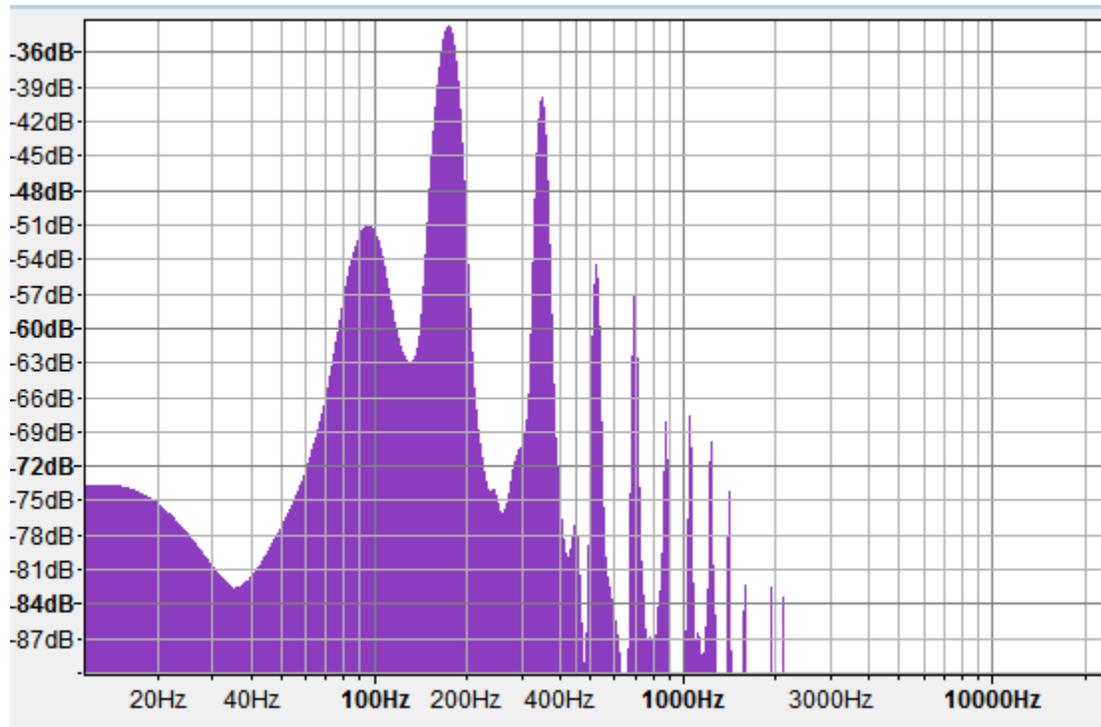


Nota E3

pulsada

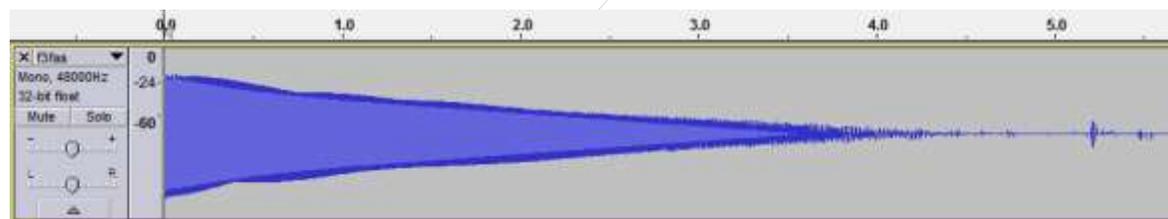
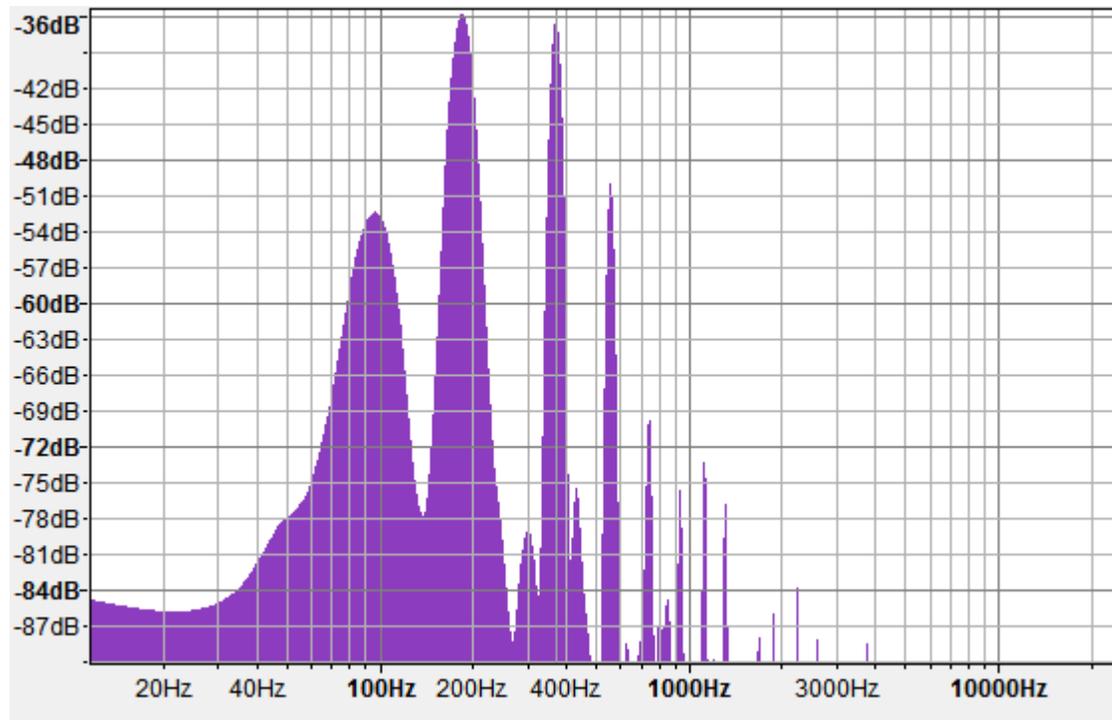


Nota F3

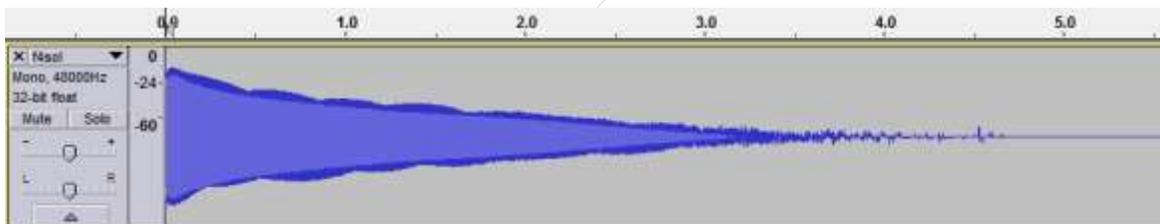
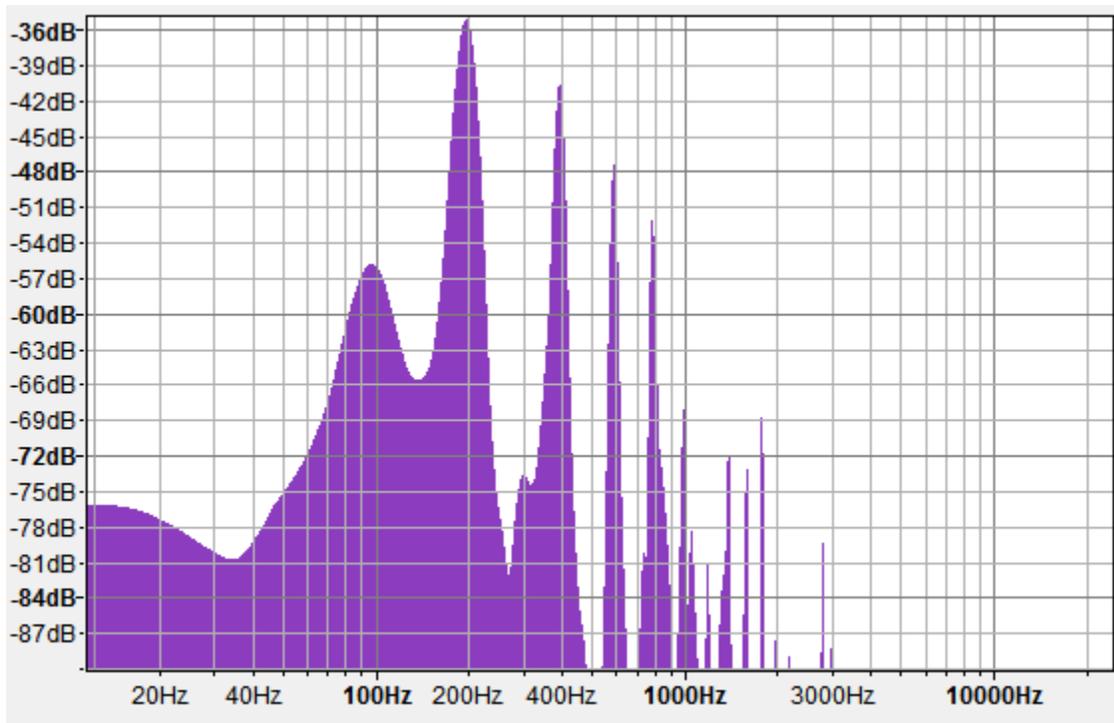


Nota F#3

pulsada

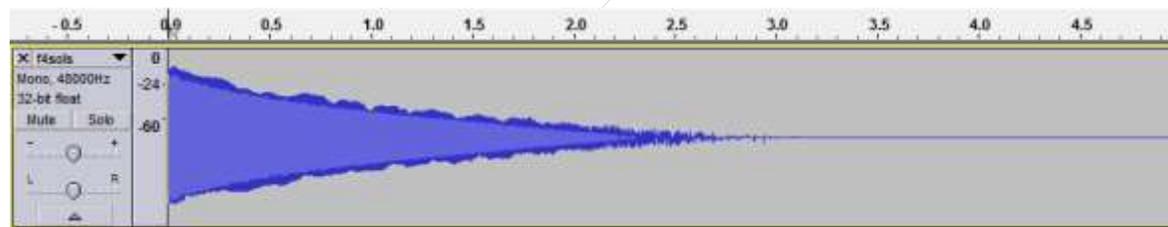
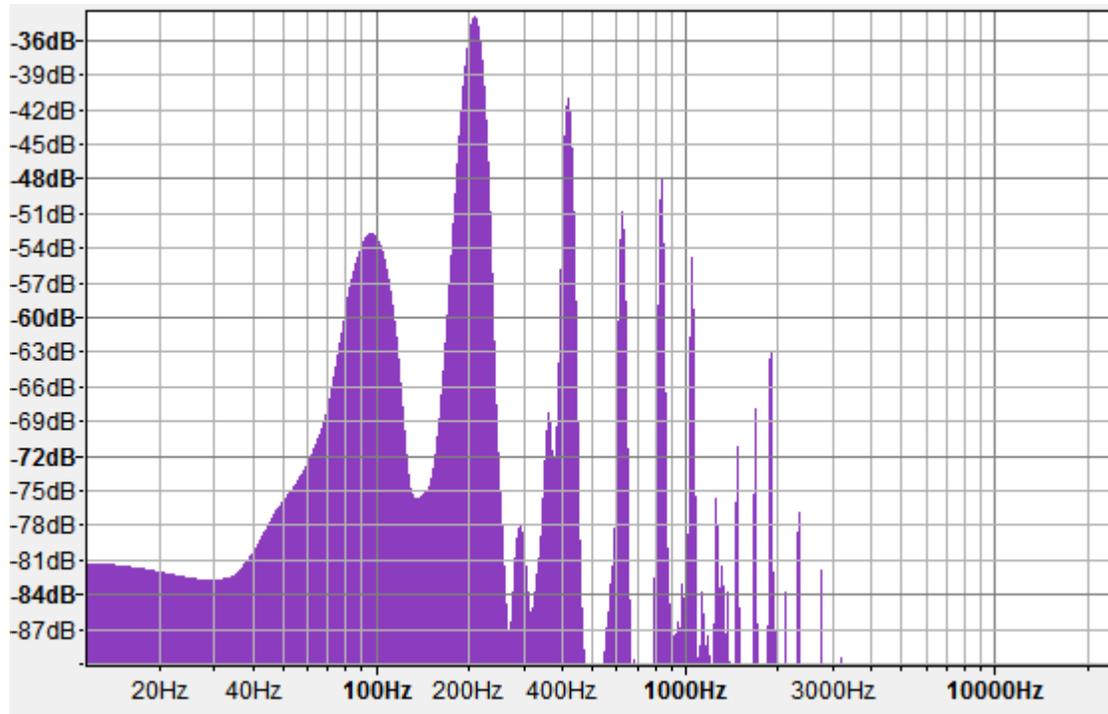


Nota G3

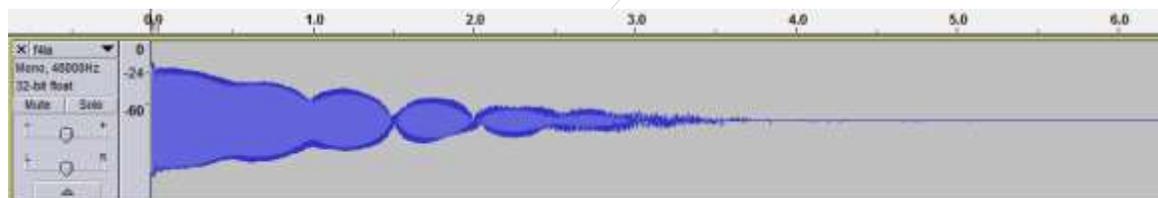
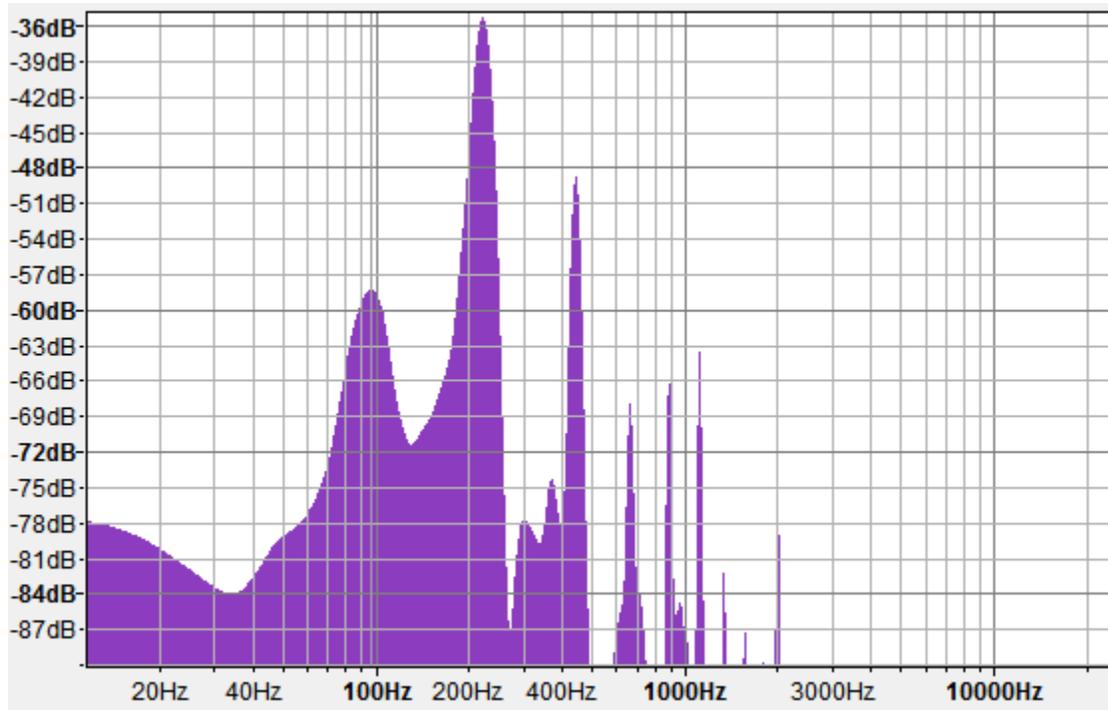


Nota G#3

pulsada

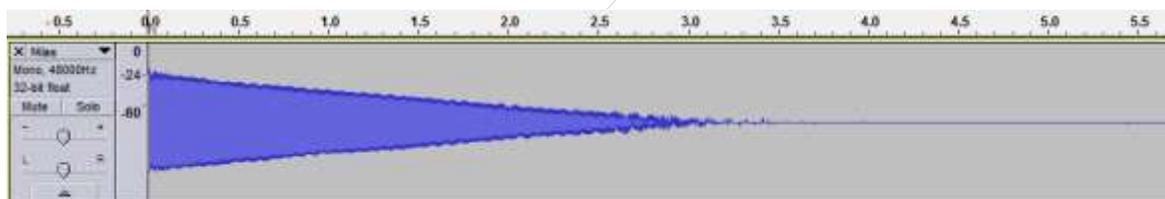
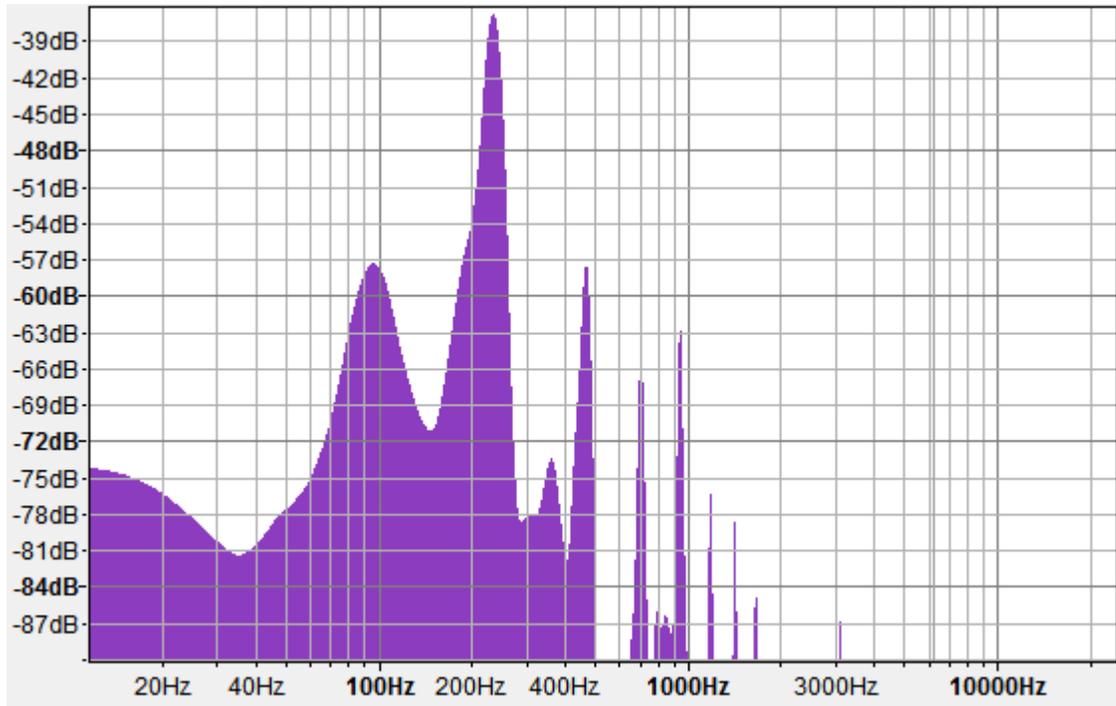


Nota A3

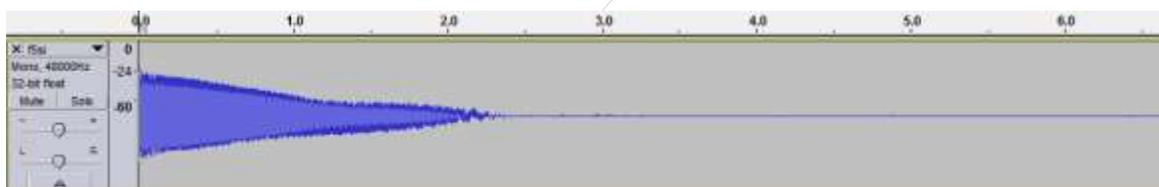
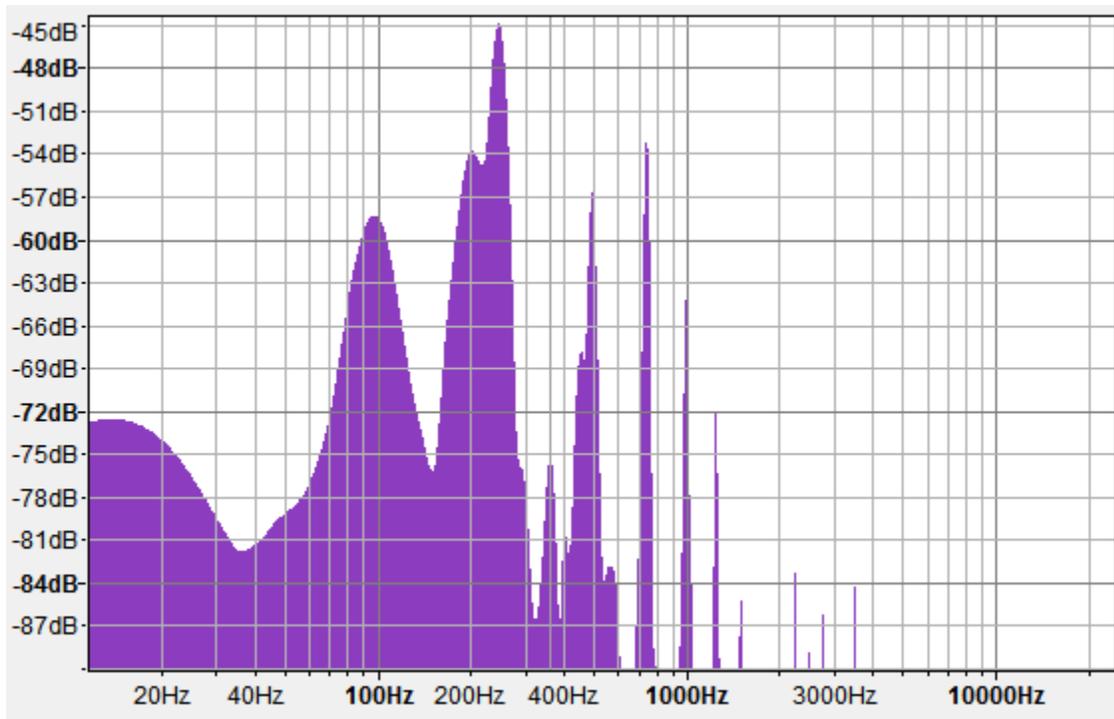


Nota A#3

pulsada

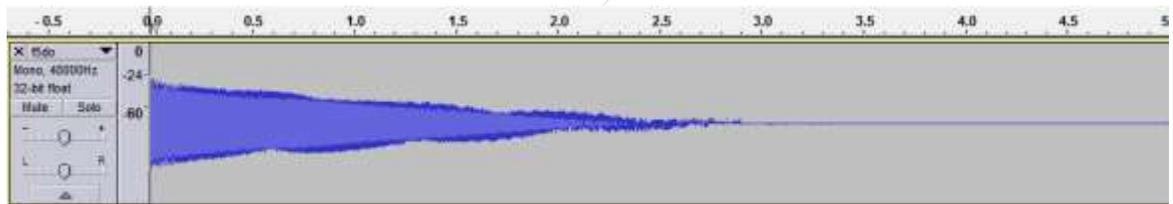
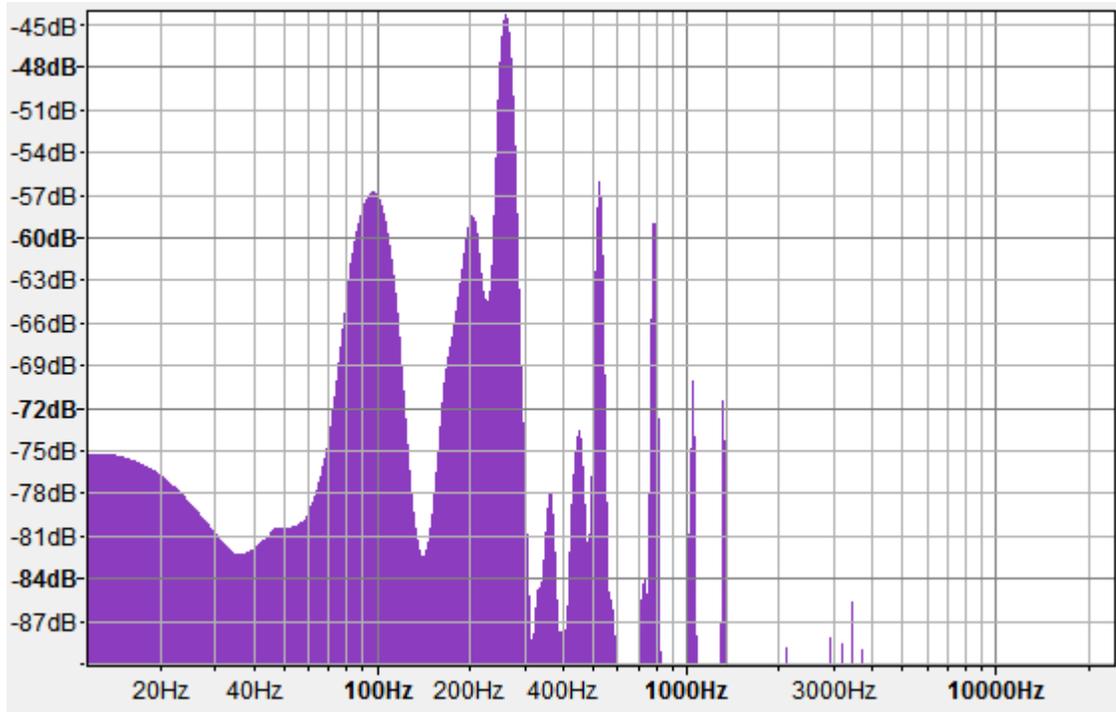


Nota B3

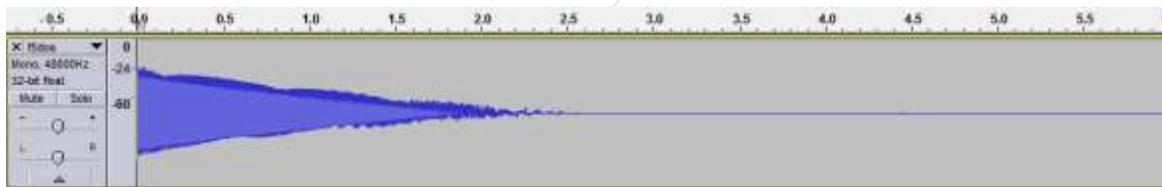
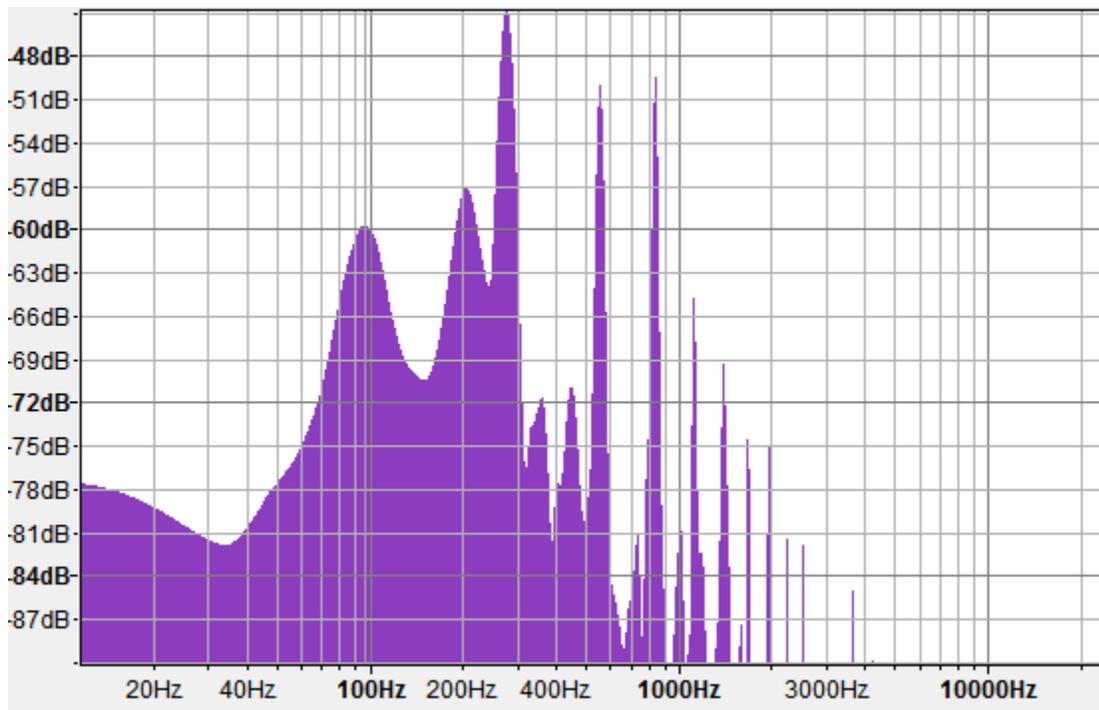


Nota C4

pulsada

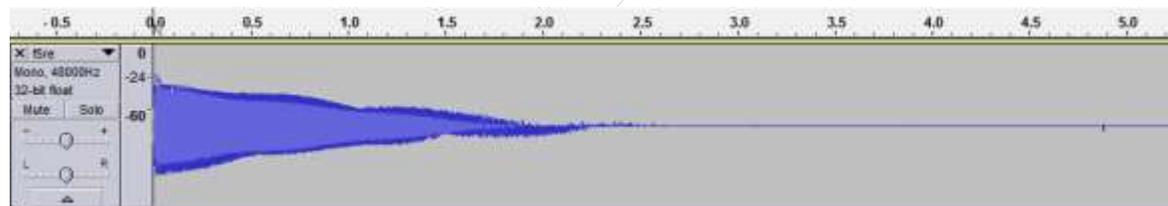
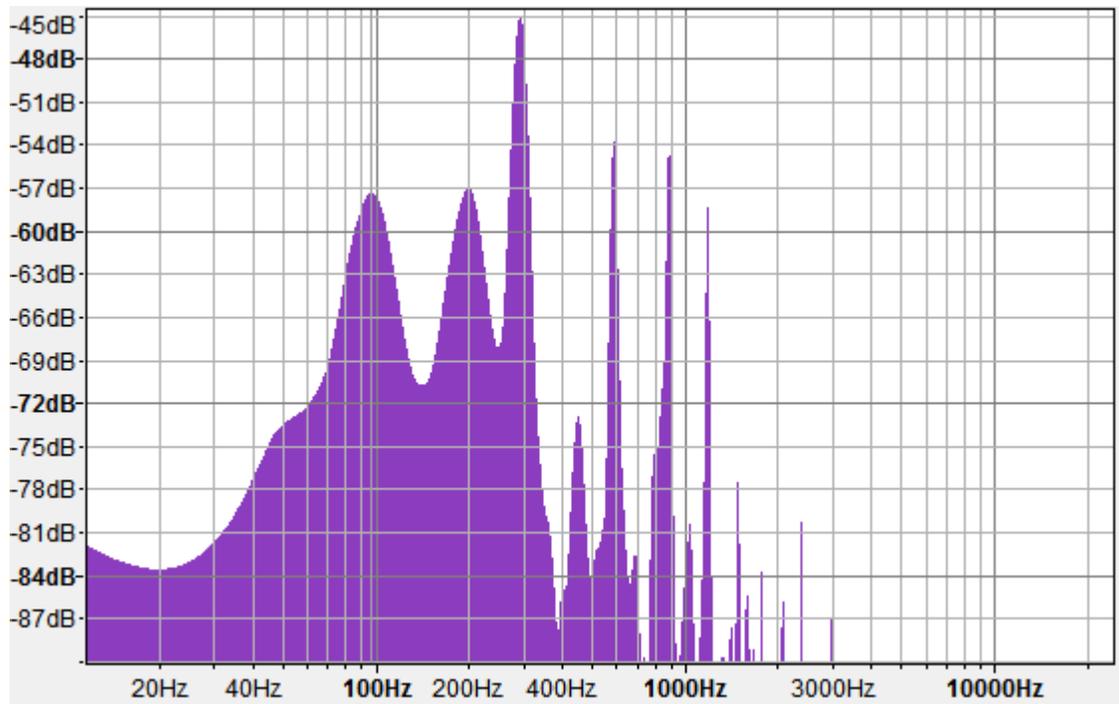


Nota C#4

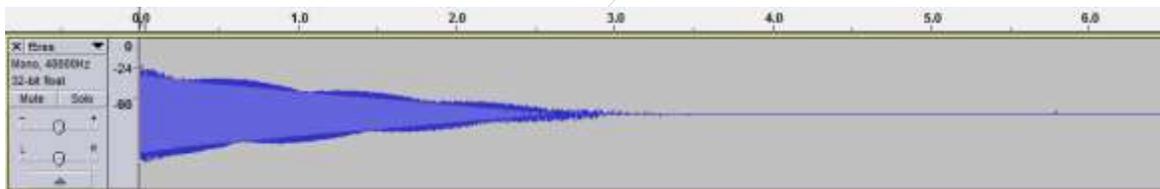
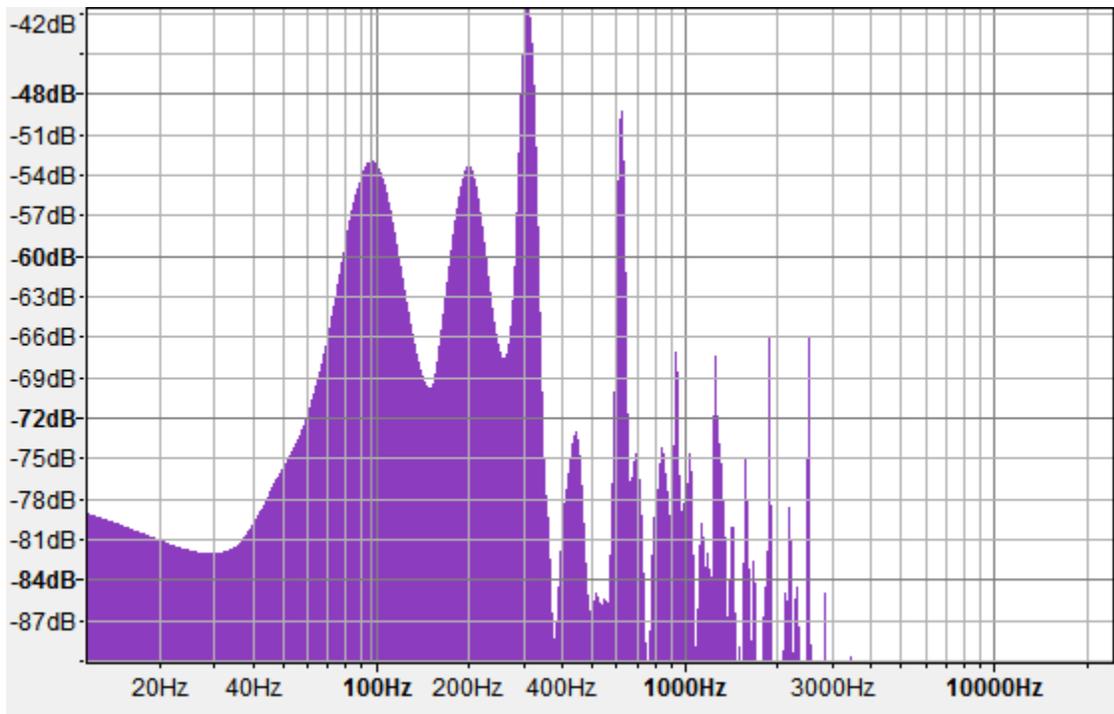


Nota D4

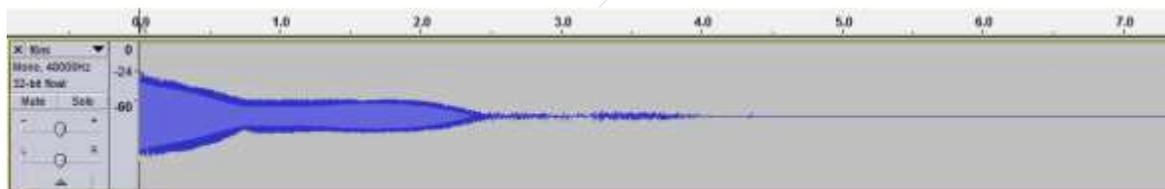
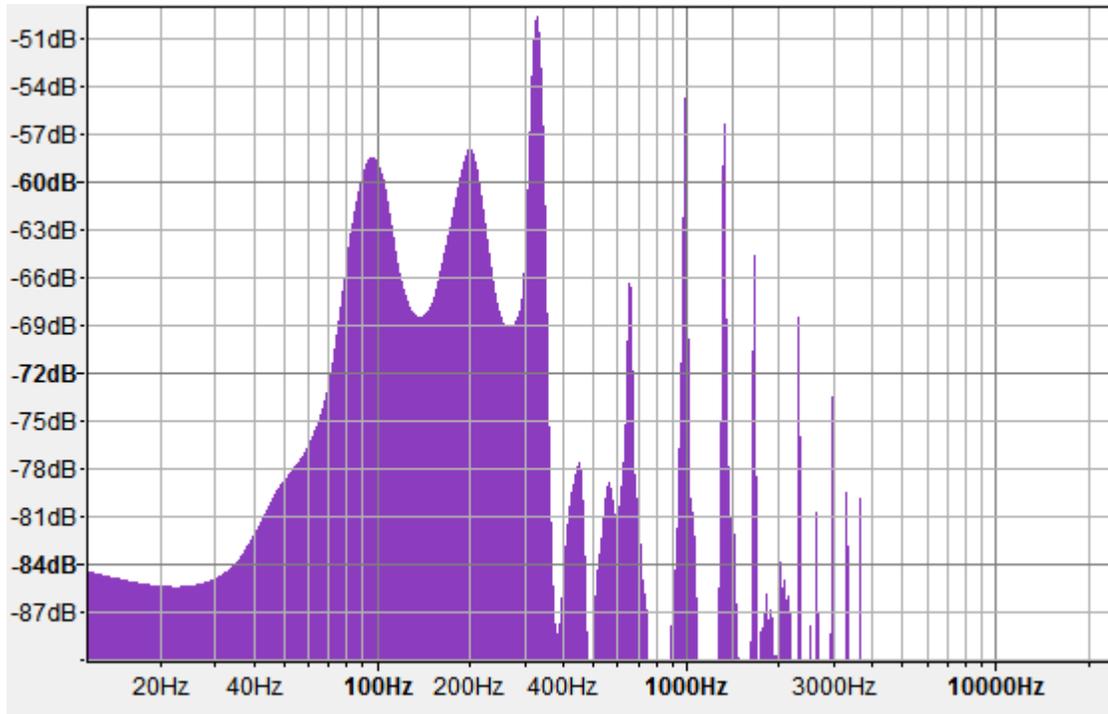
pulsada



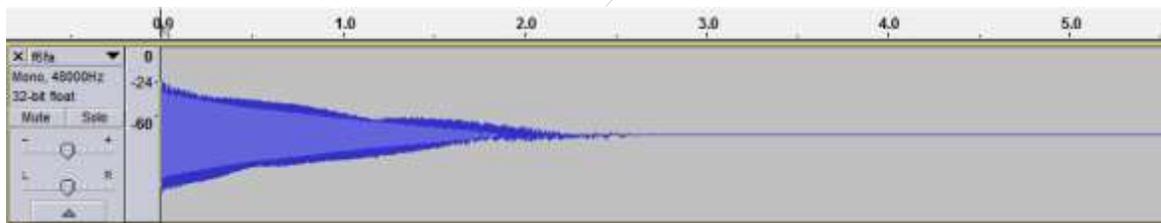
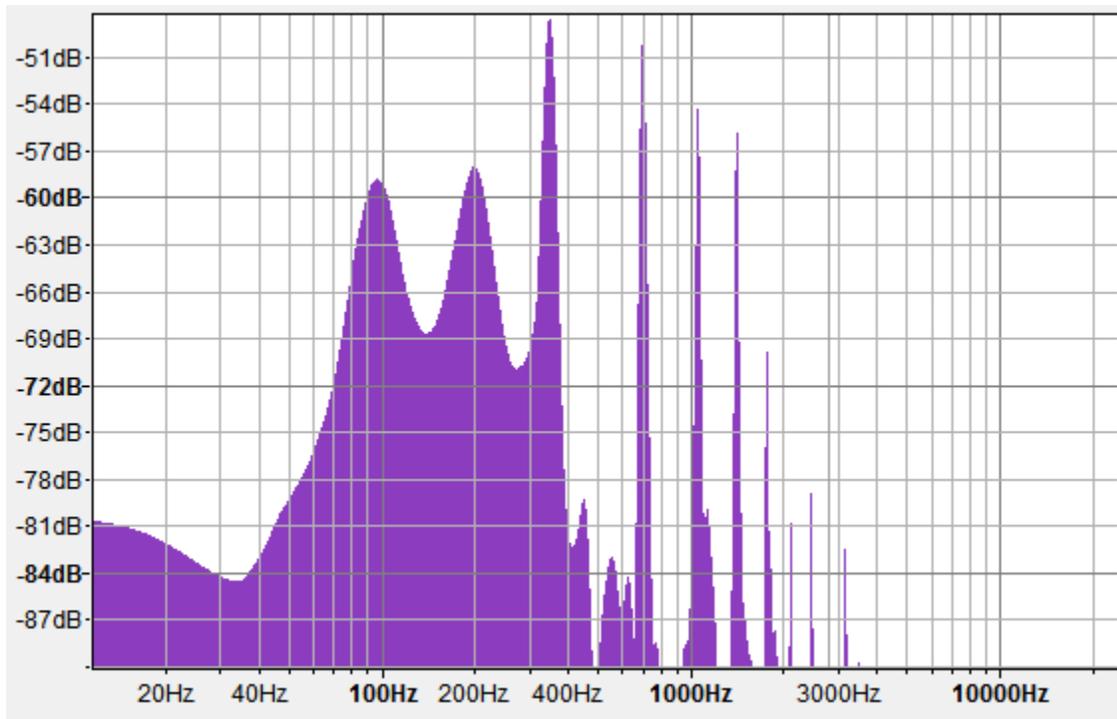
Nota D#4



Nota E4

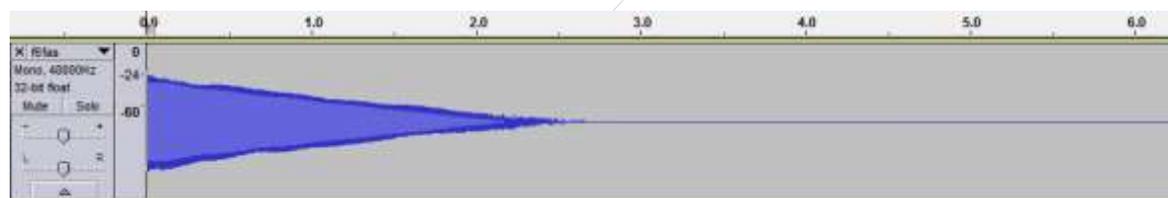
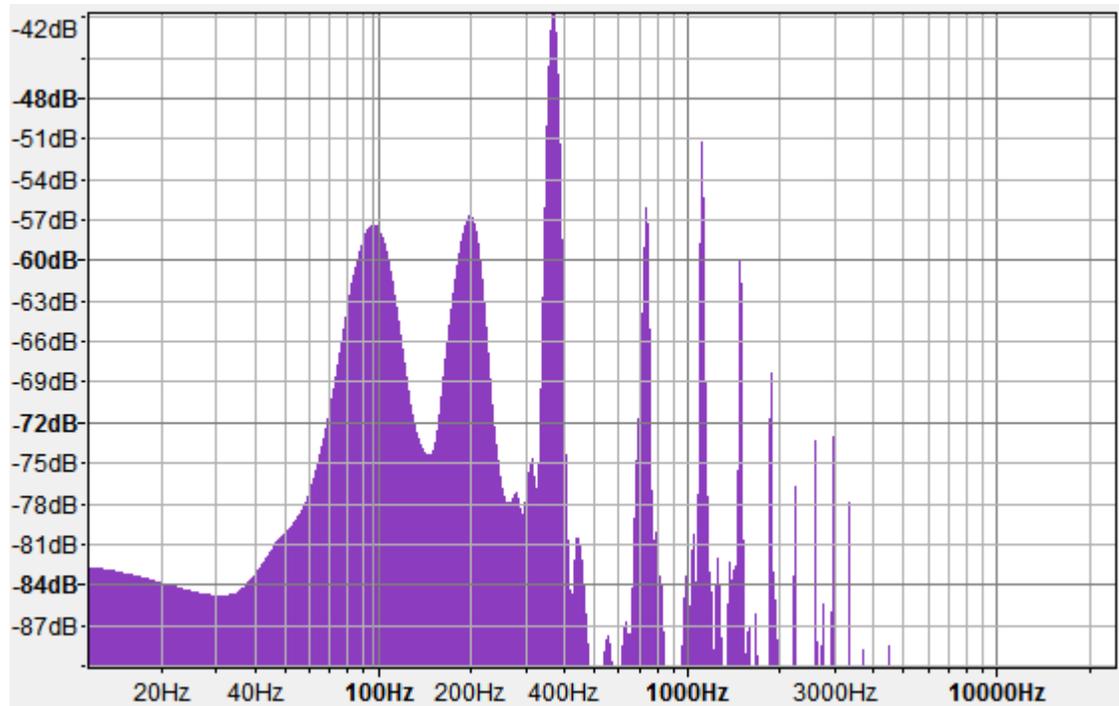


Nota F4

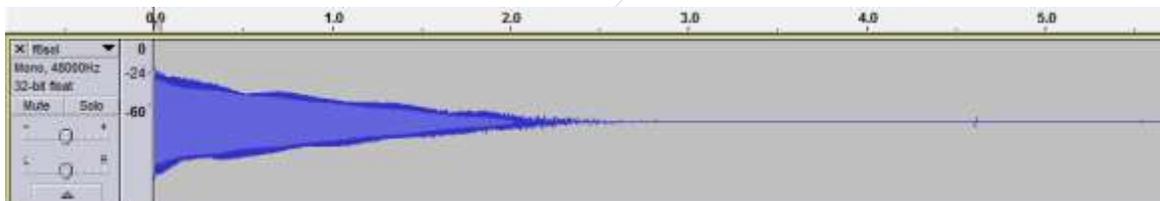
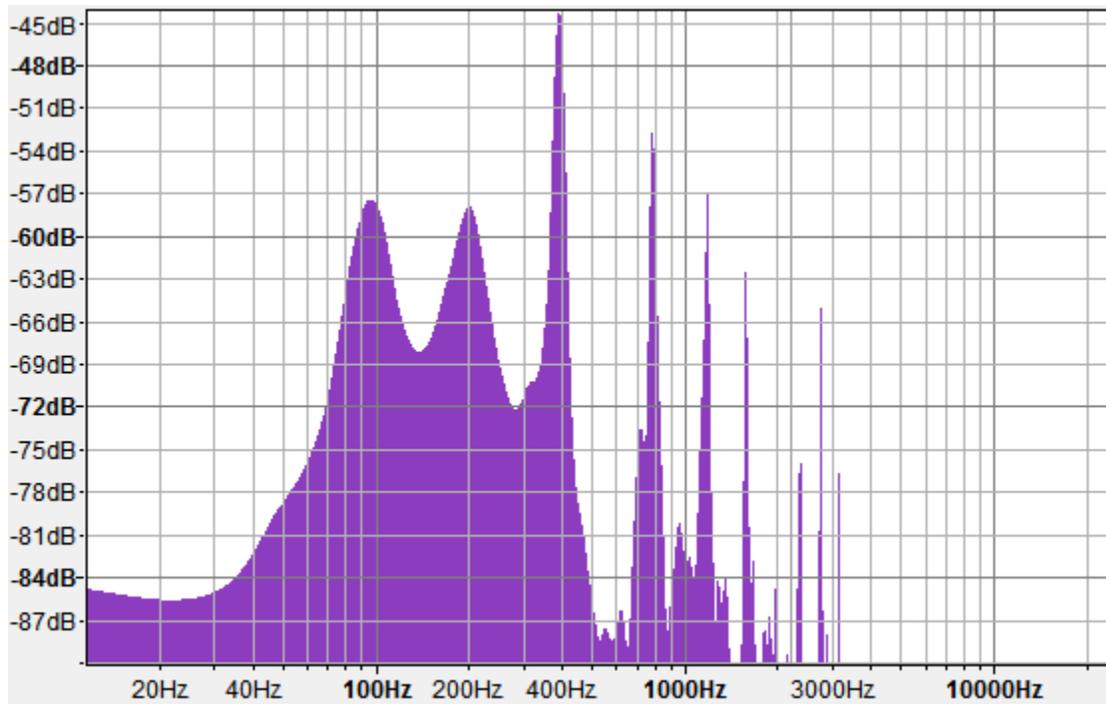


Nota F#4

pulsada

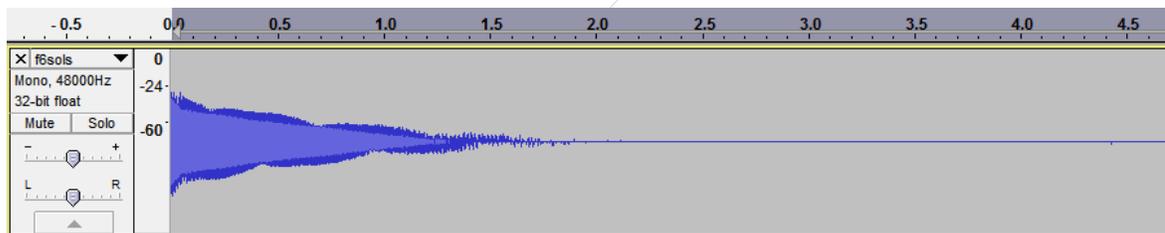
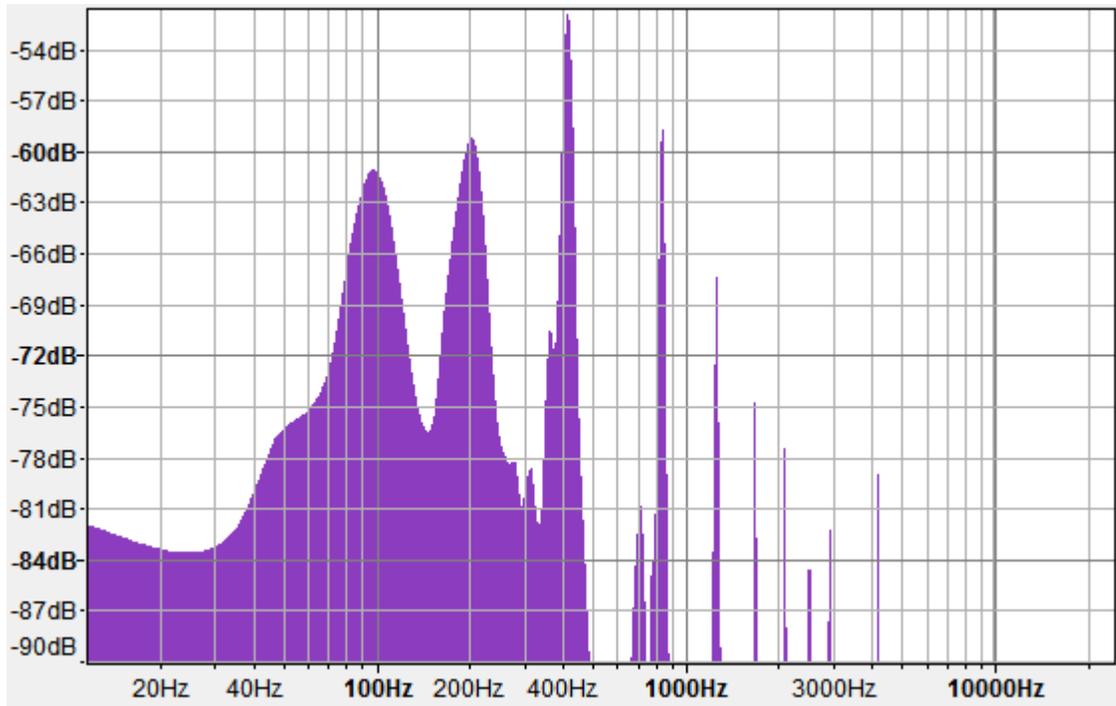


Nota G4

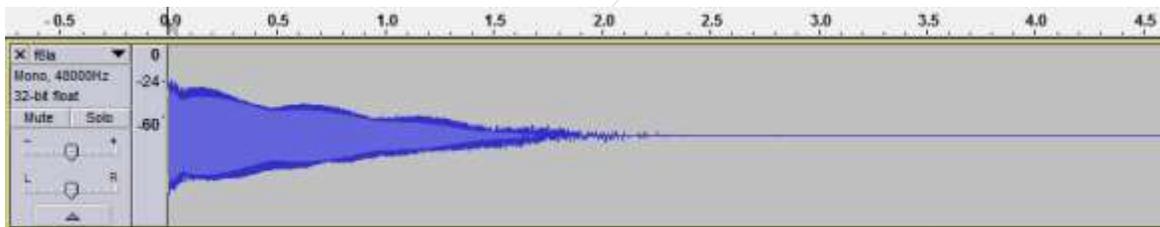
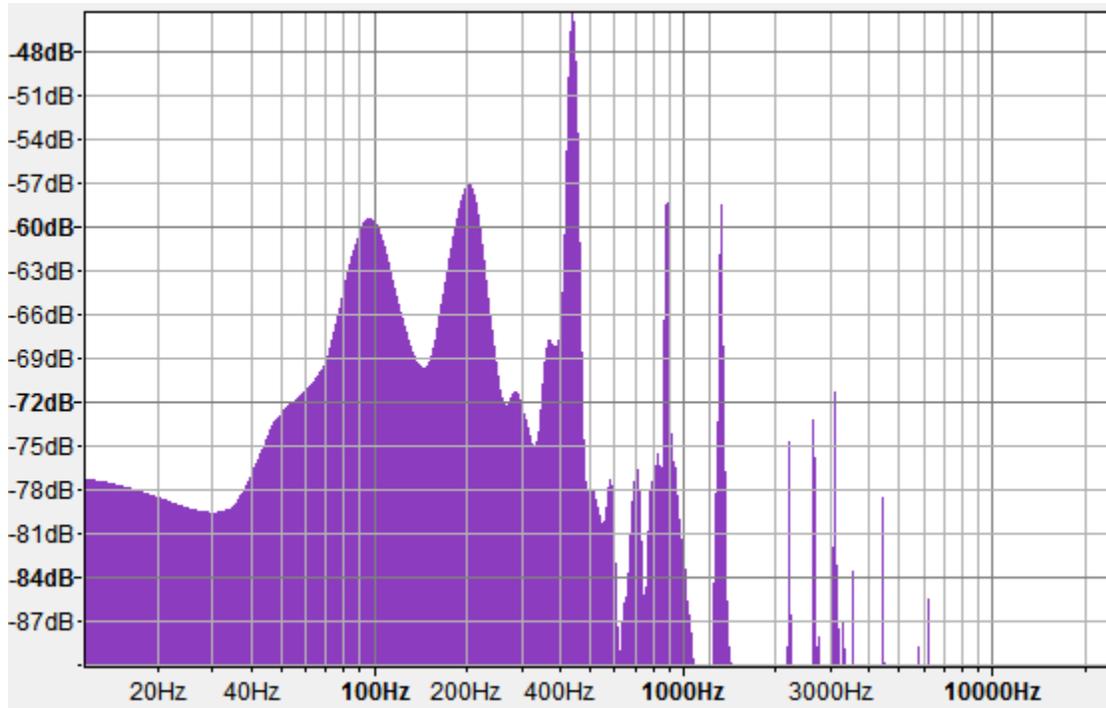


Nota G#4

pulsada

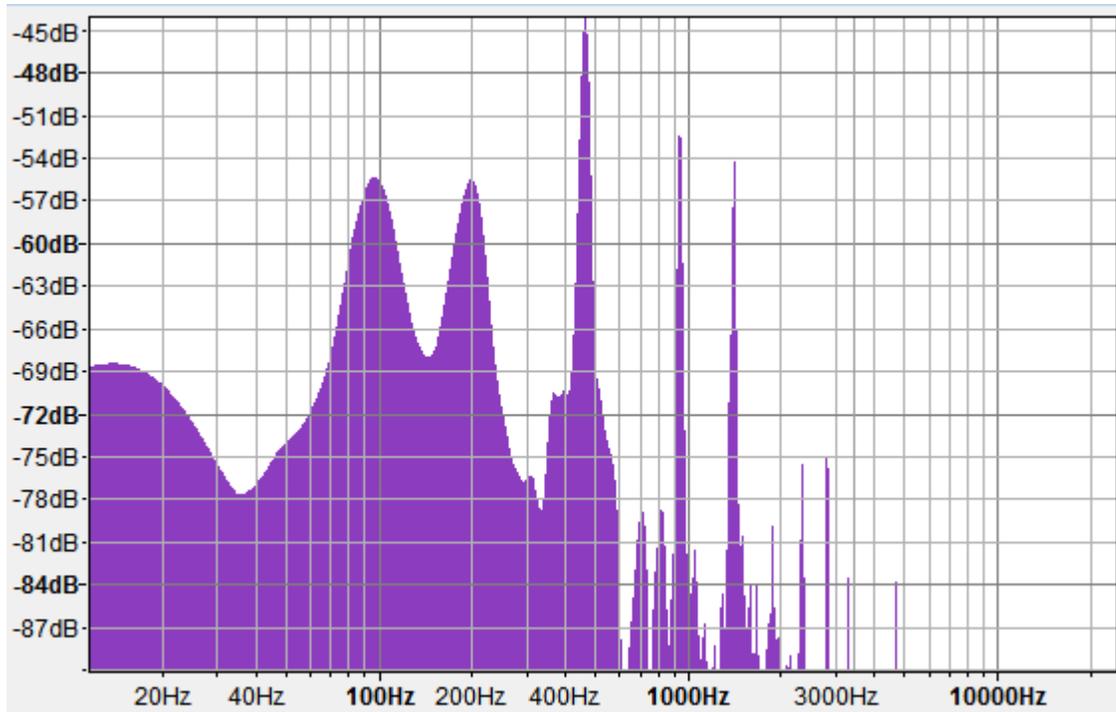


Nota A4

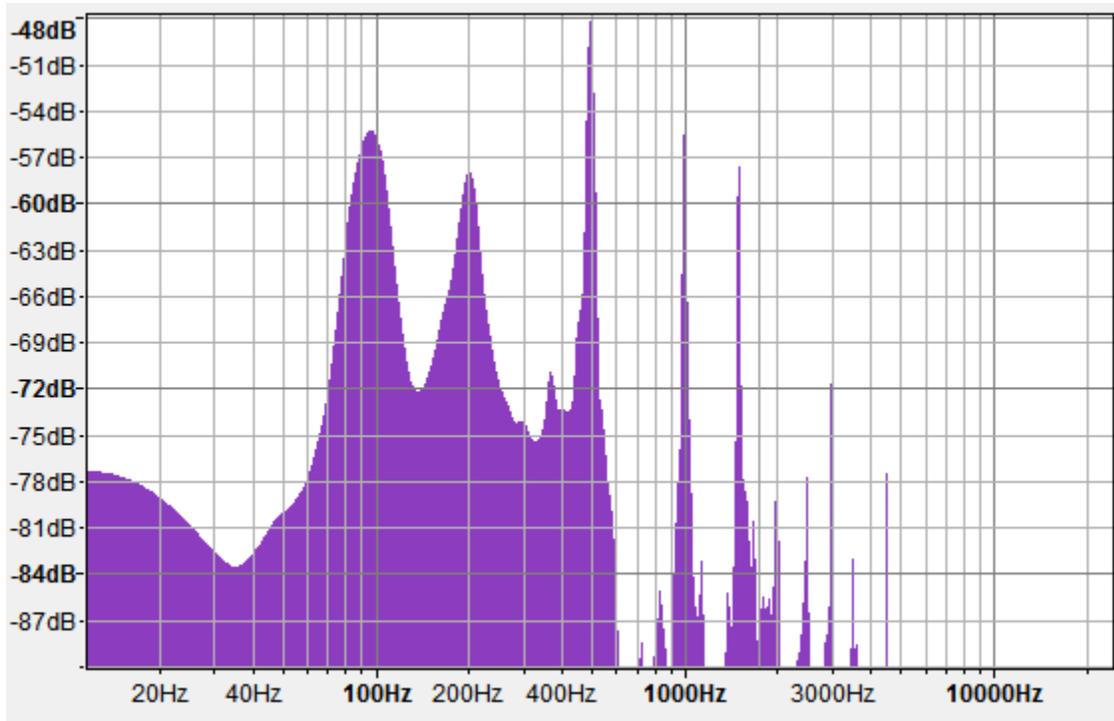


Nota A#4

pulsada

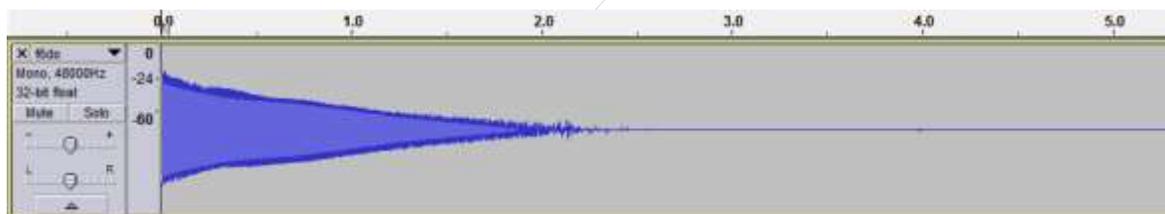
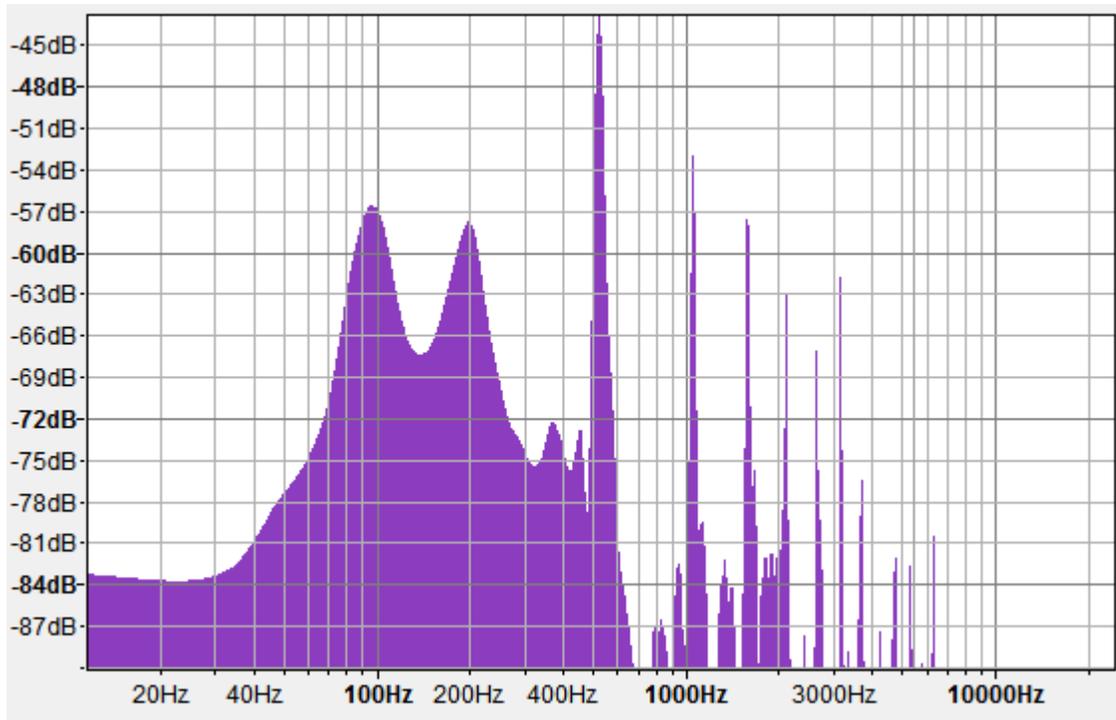


Nota B4

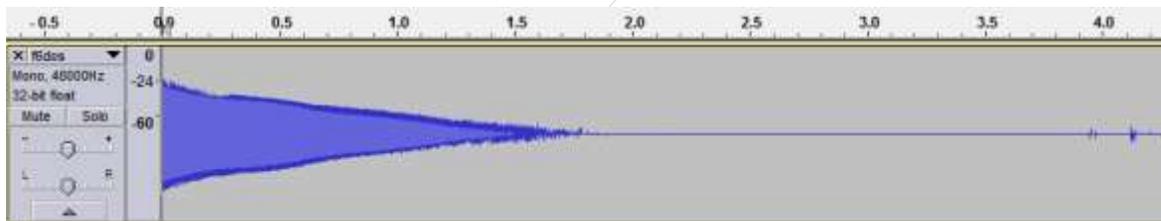
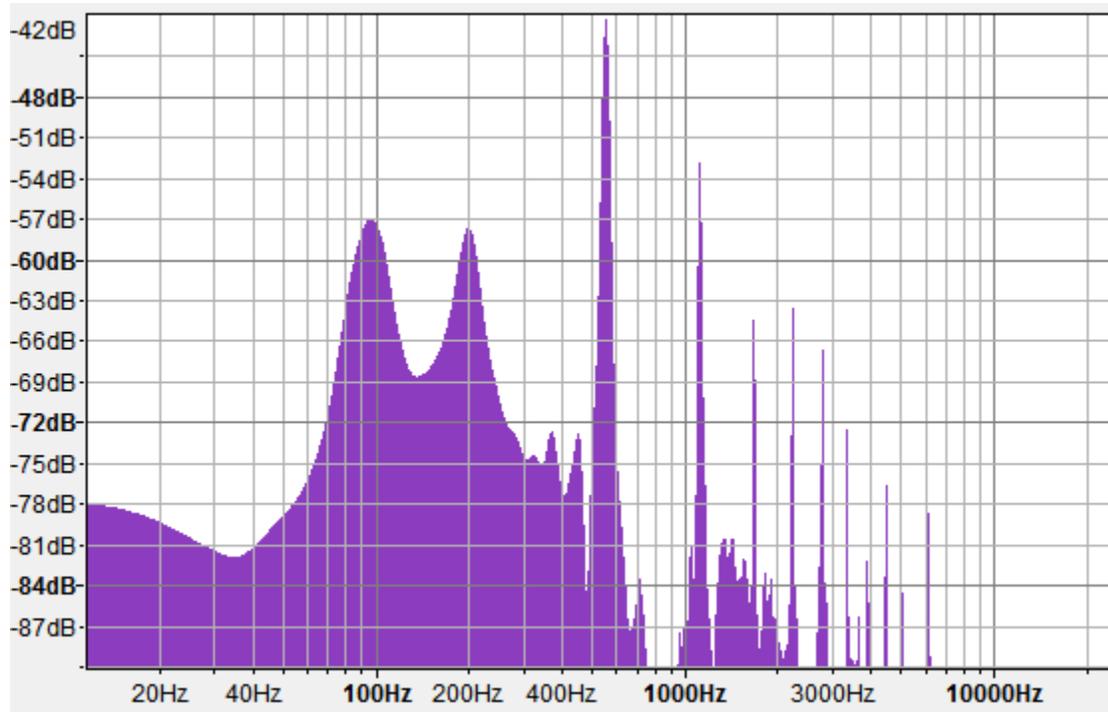


Nota C5

pulsada

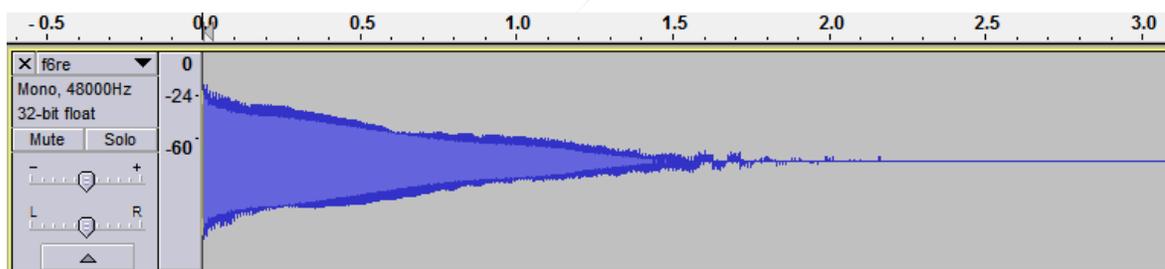
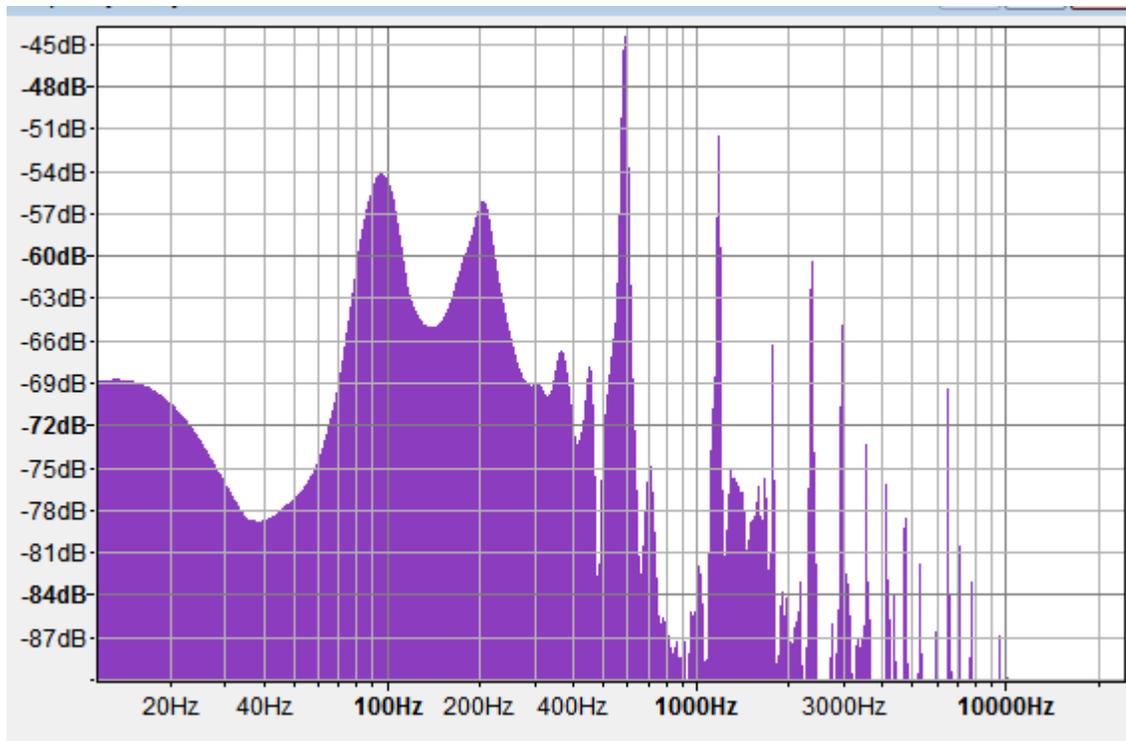


Nota C#5

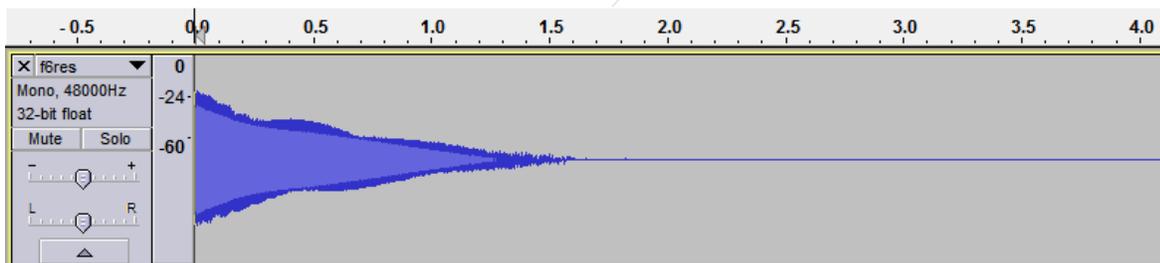
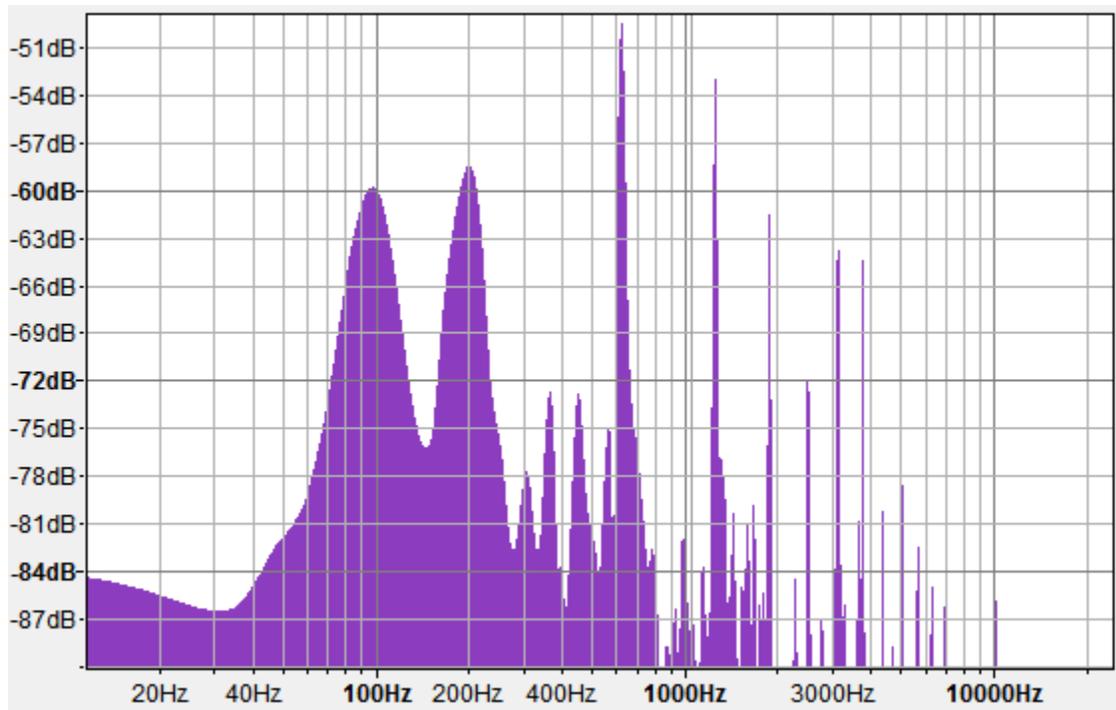


Nota D5

pulsada

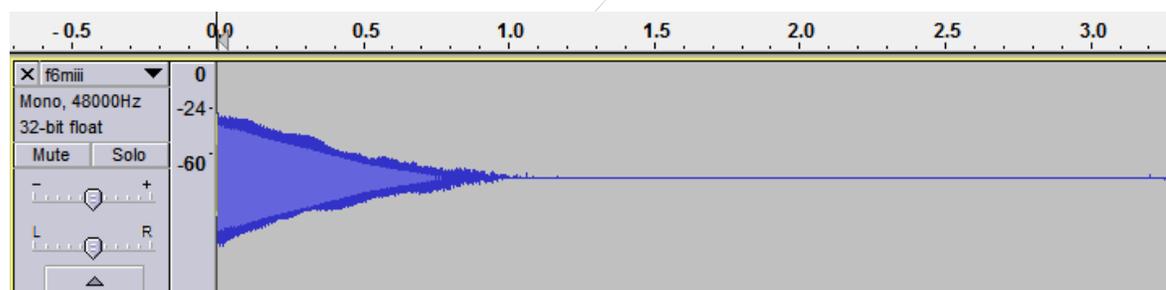
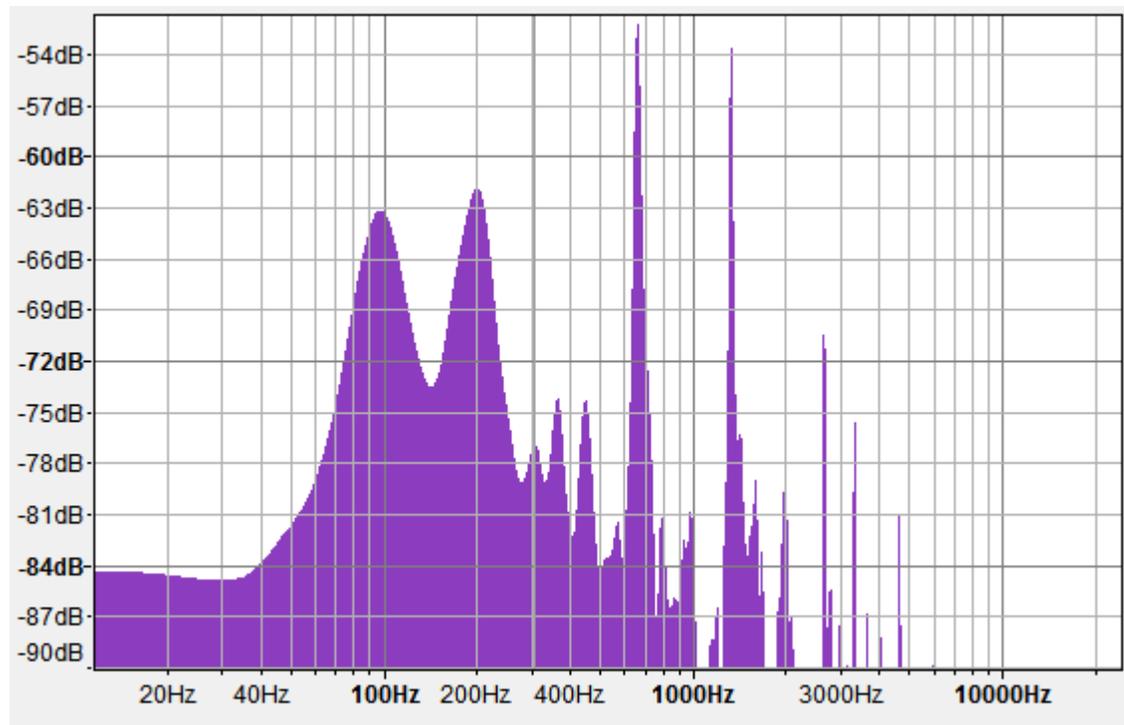


Nota D#5



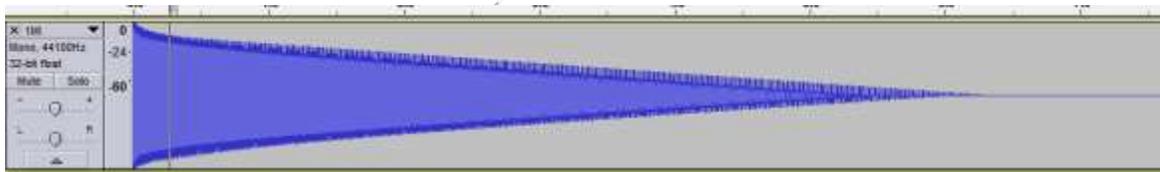
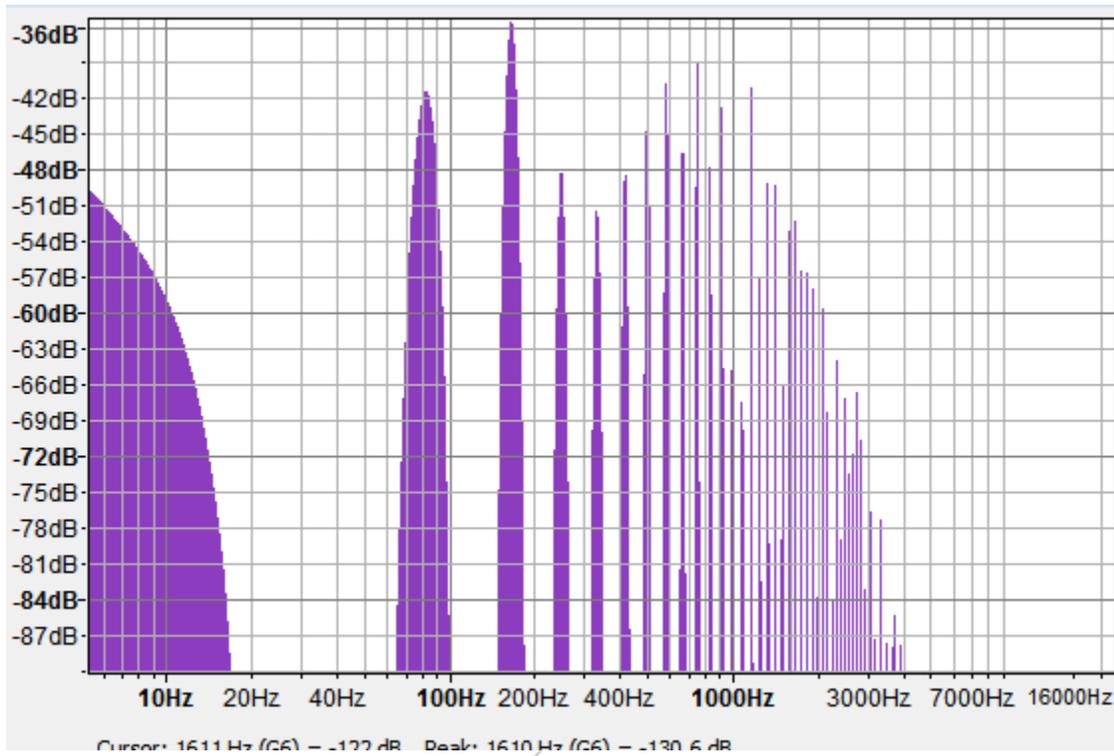
Nota E5

pulsada



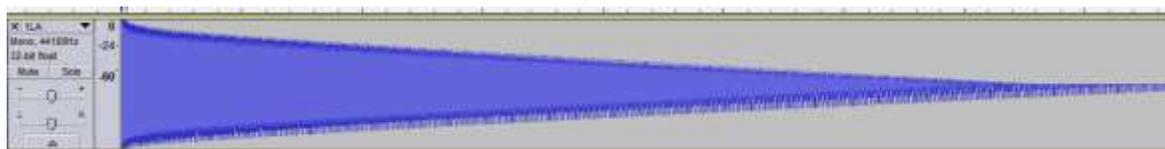
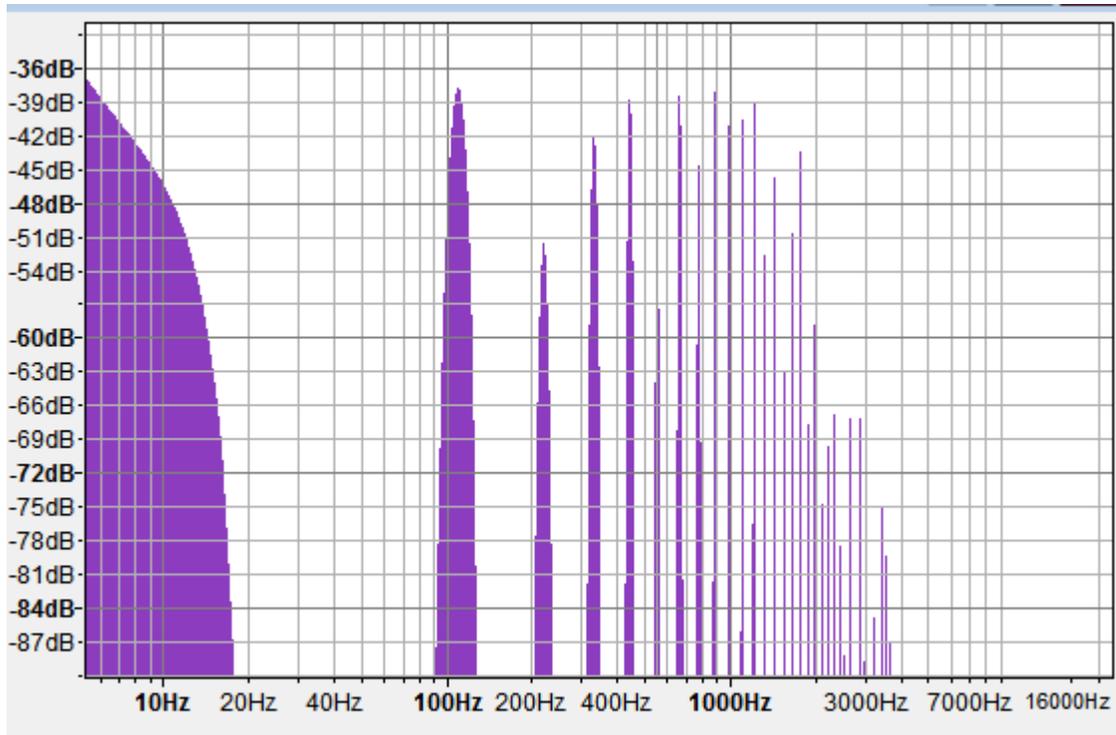
B. Método de Karplus-Strong (Forma de onda en dBs y espectro)

Nota E2

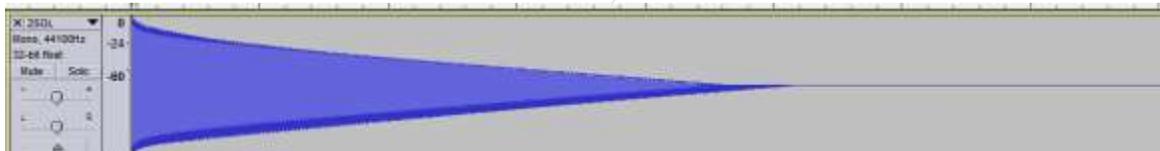
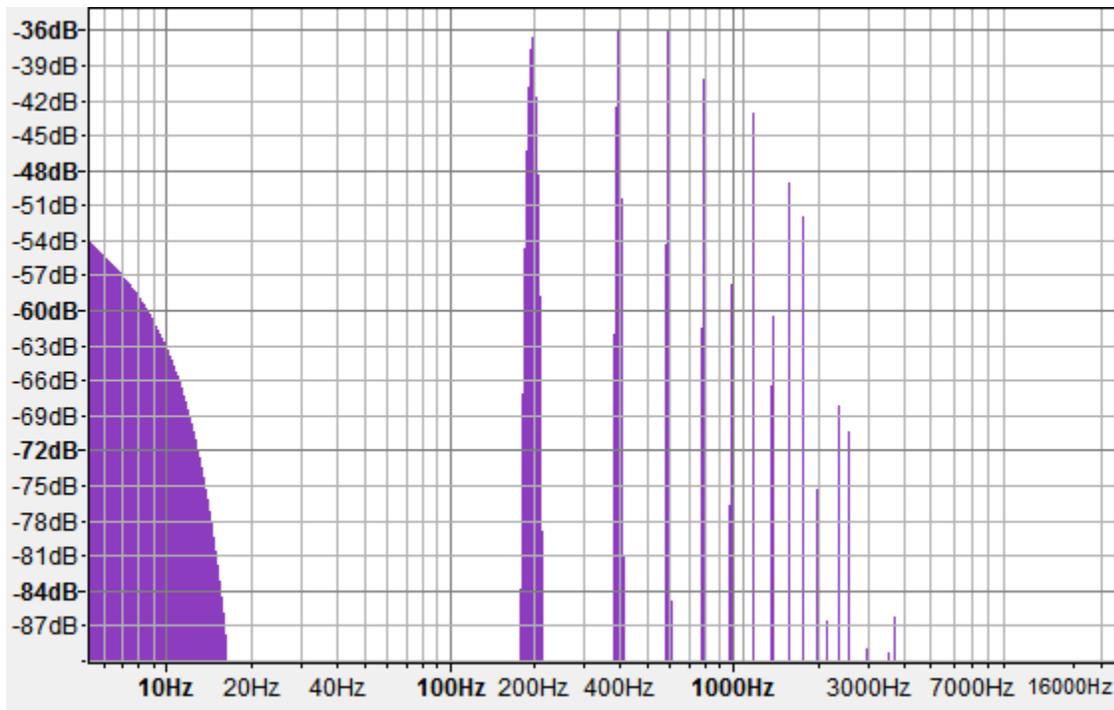


Nota A2

pulsada

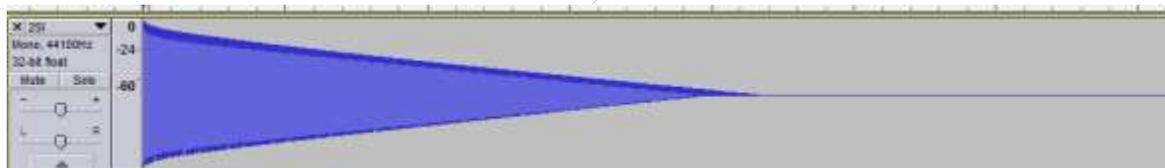
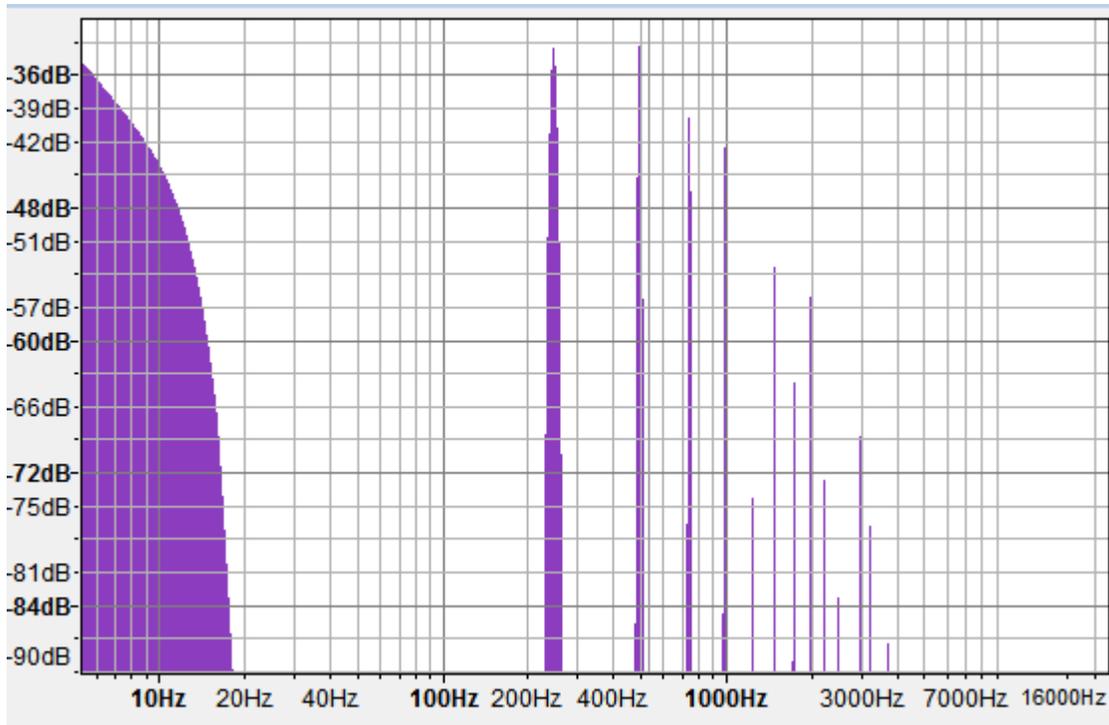


Nota G3

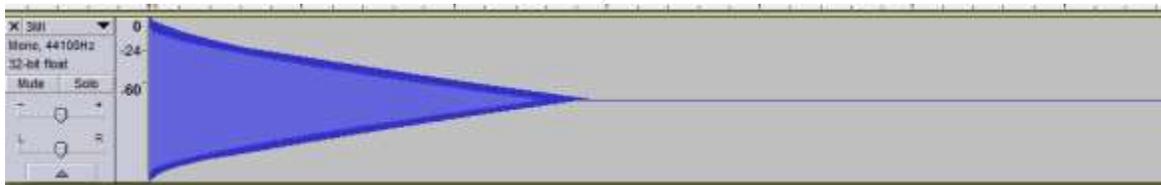
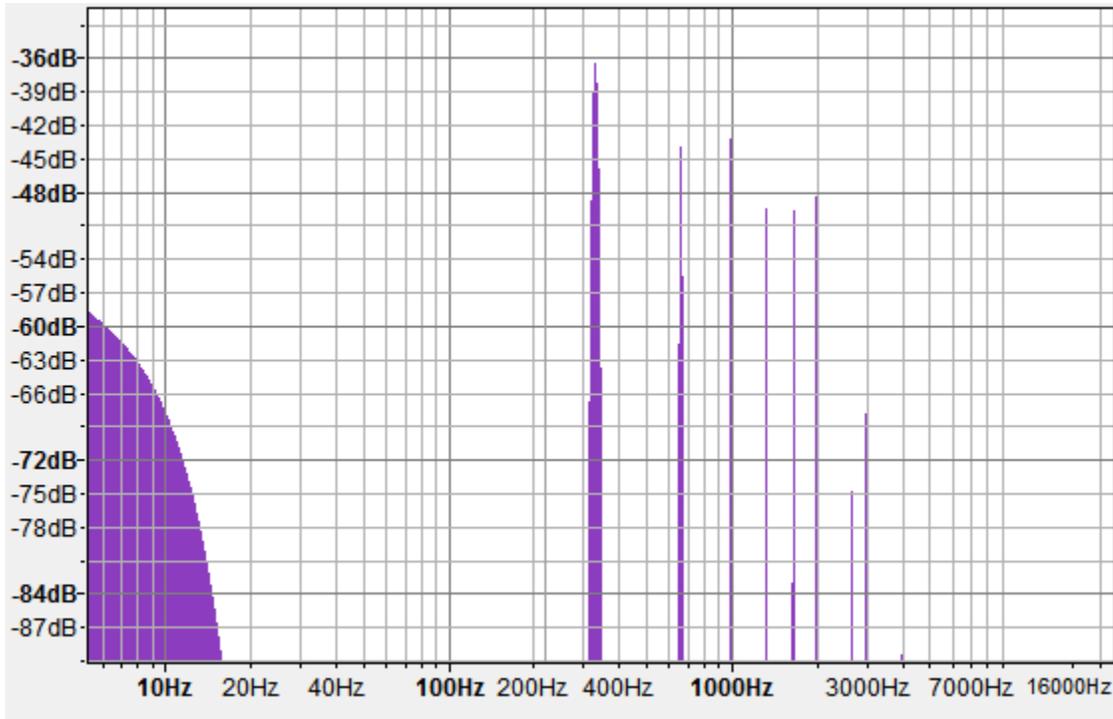


Nota B3

pulsada

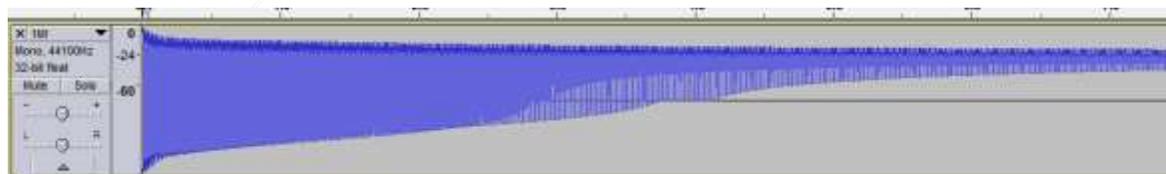
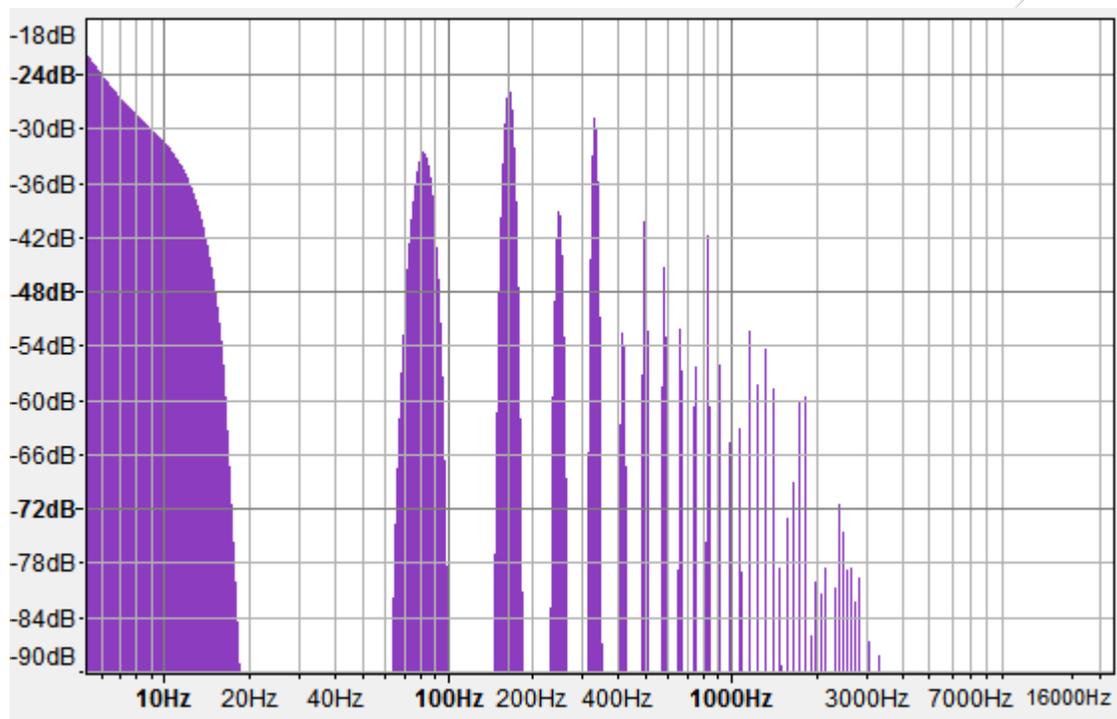


Nota E4

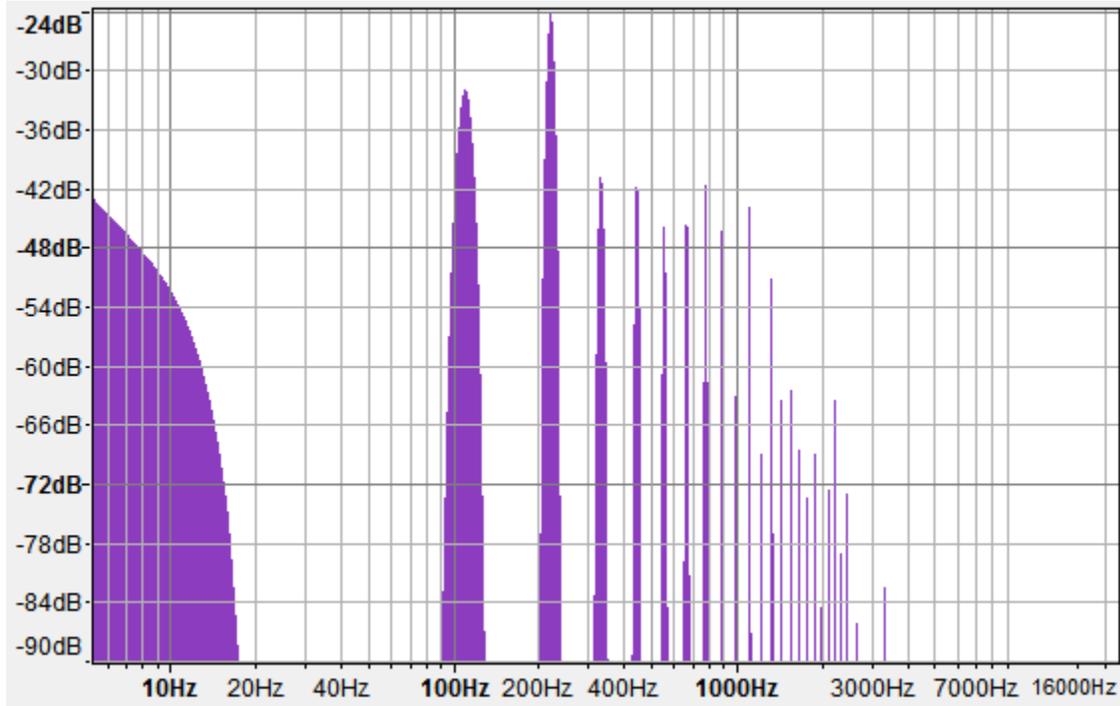


C. Método de Karplus-Strong Extendido (forma de onda en dBs y espectro)

Nota E2

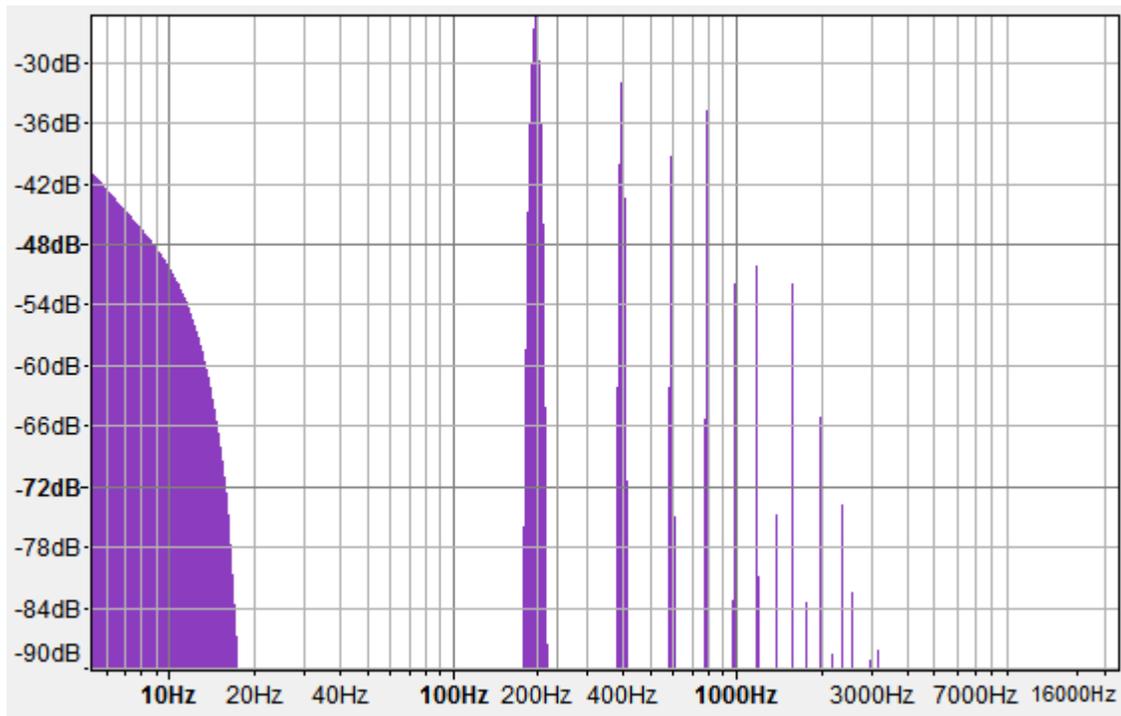


Nota A2

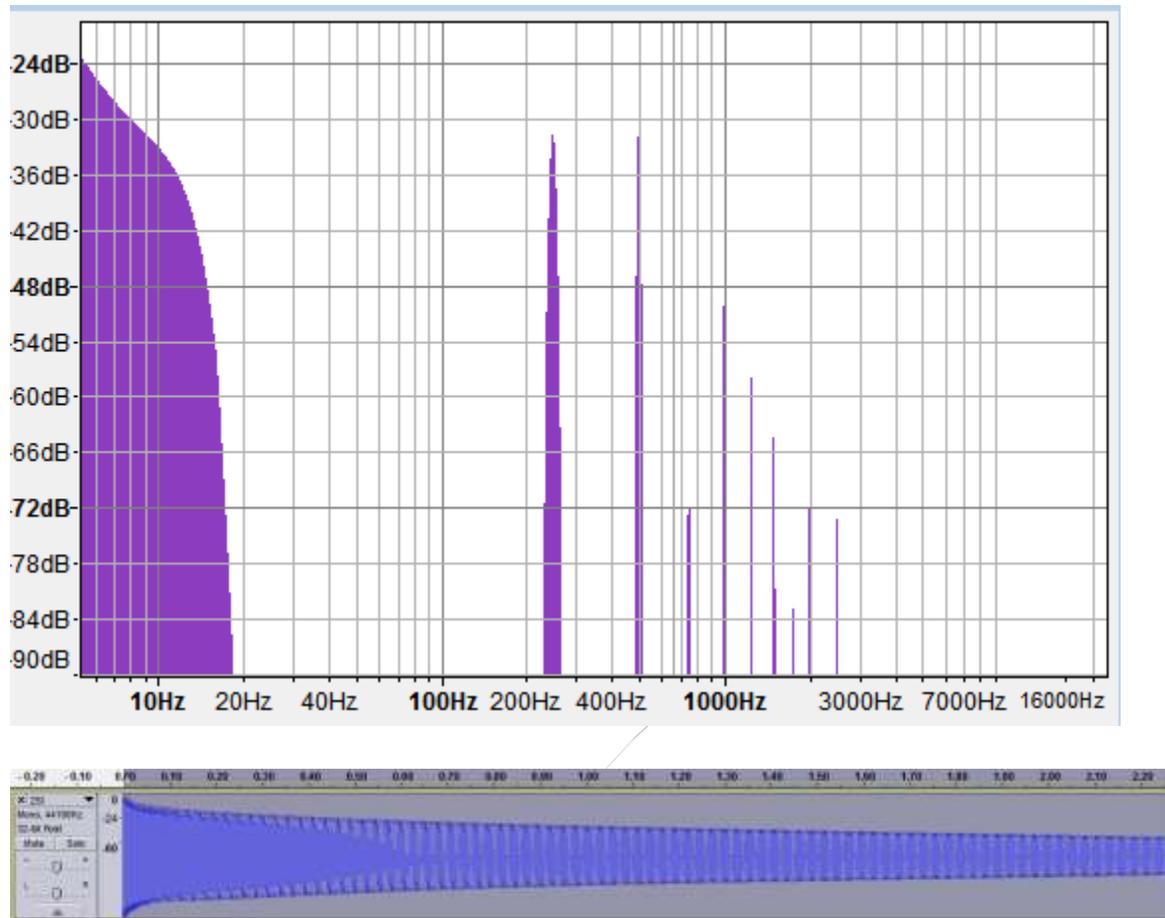


pulsada

Nota G3

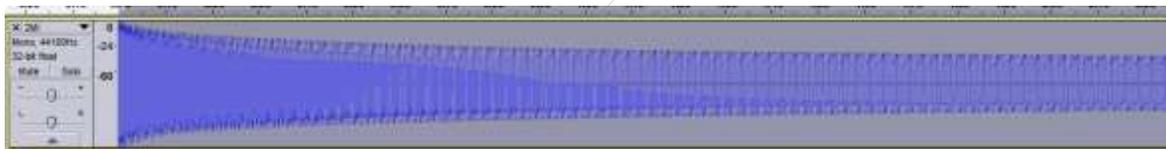
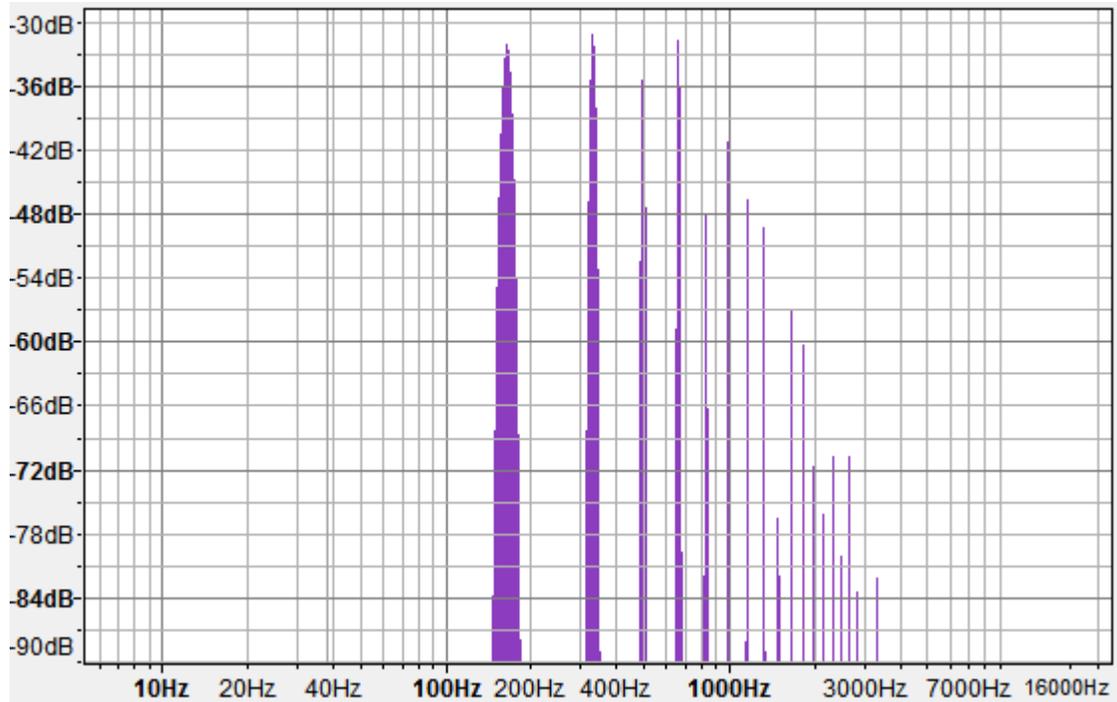


Nota B3



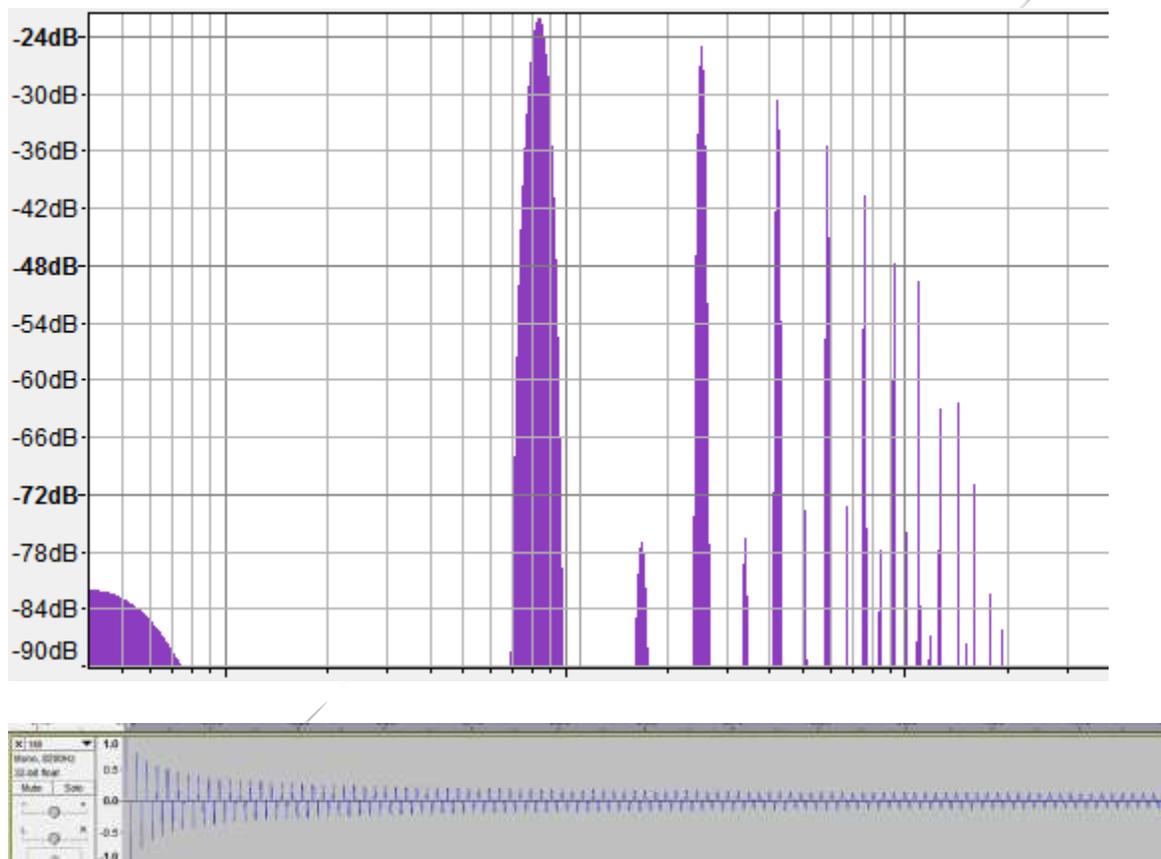
Nota E4

pulsada



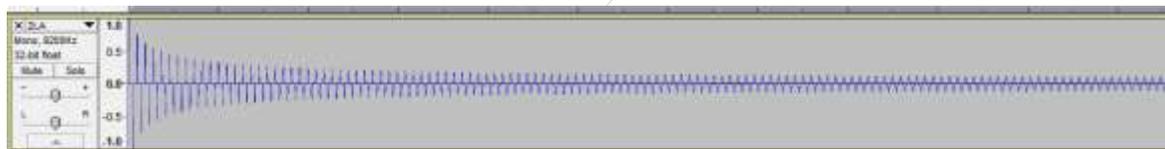
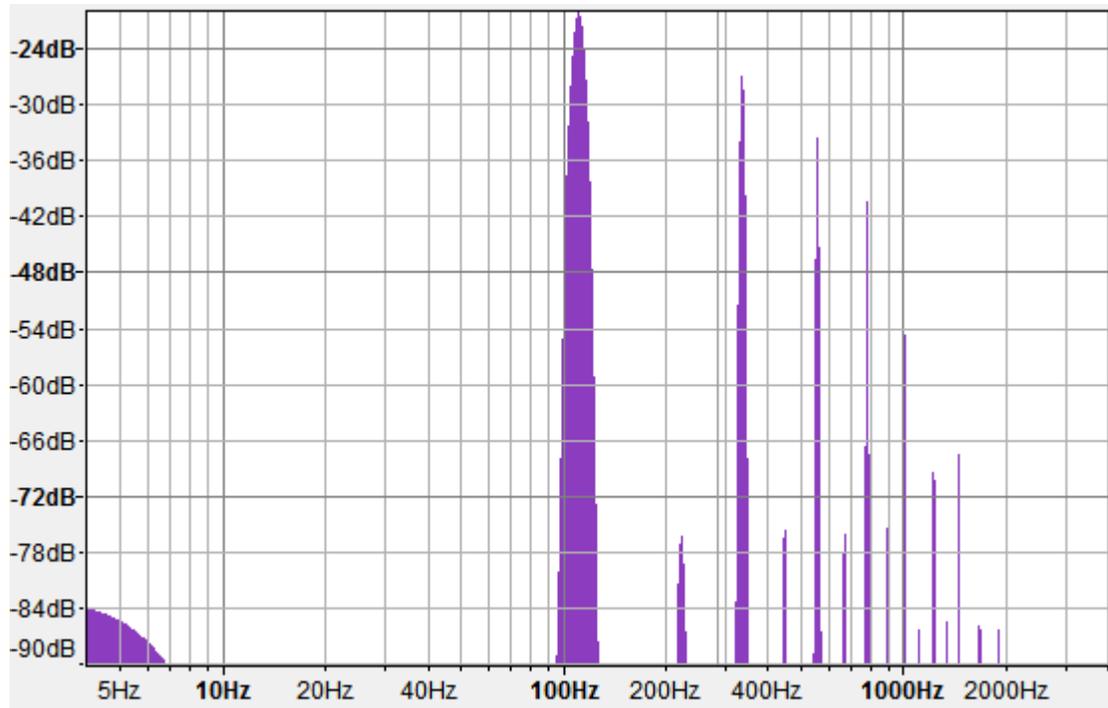
D. Método por guía de onda (forma de onda en dBs y espectro)

Nota E2

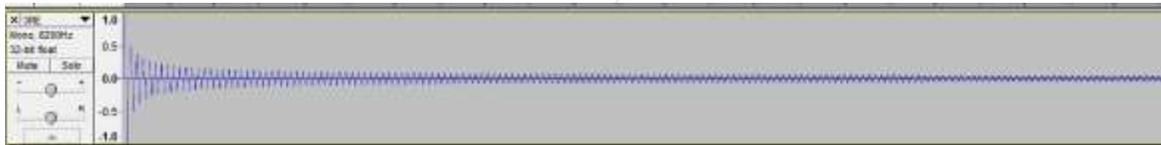
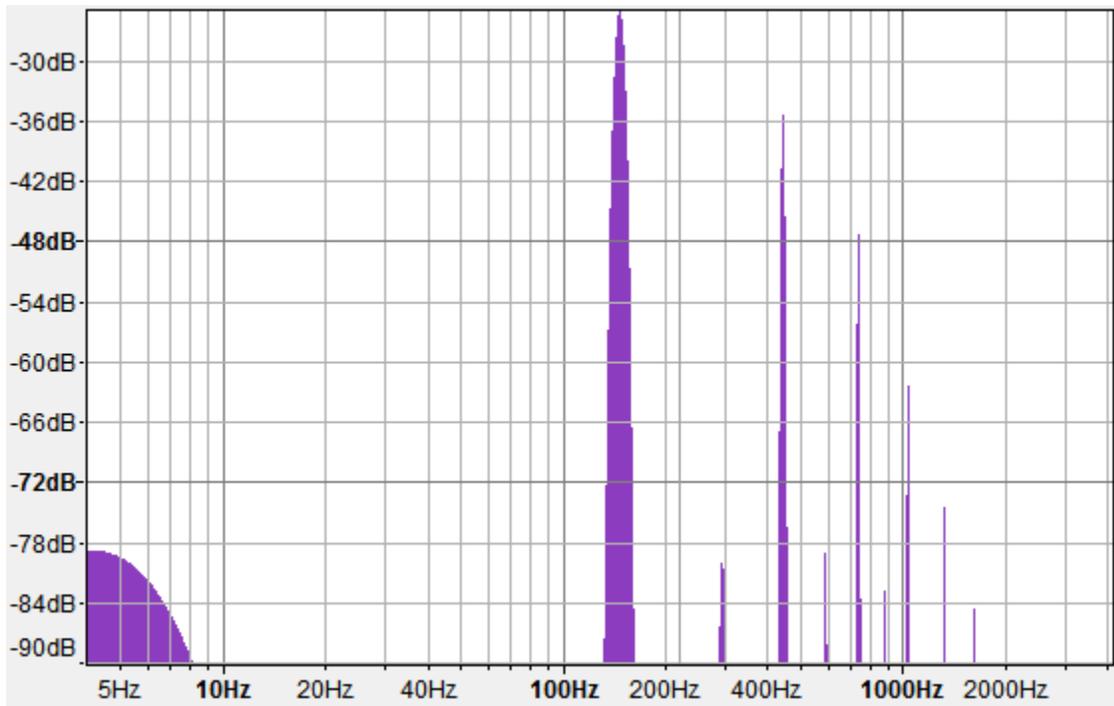


Nota A2

pulsada

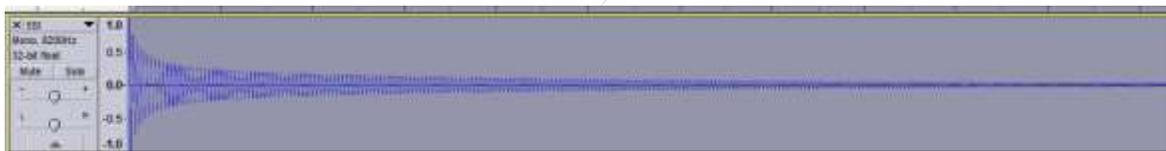
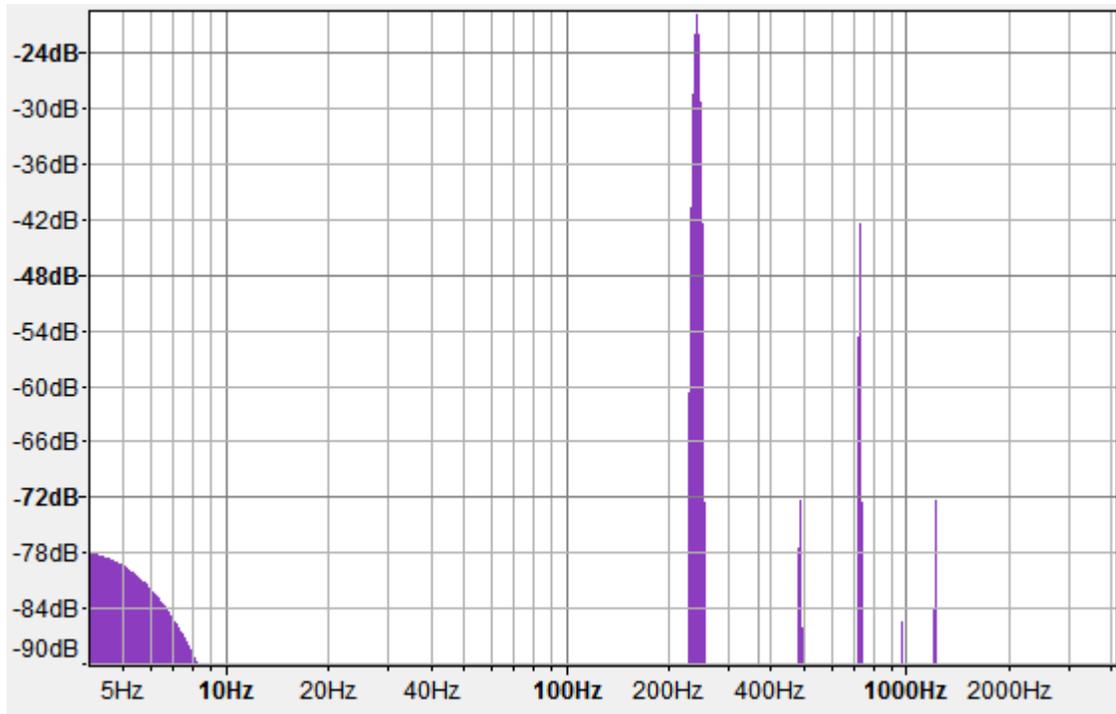


Nota G3

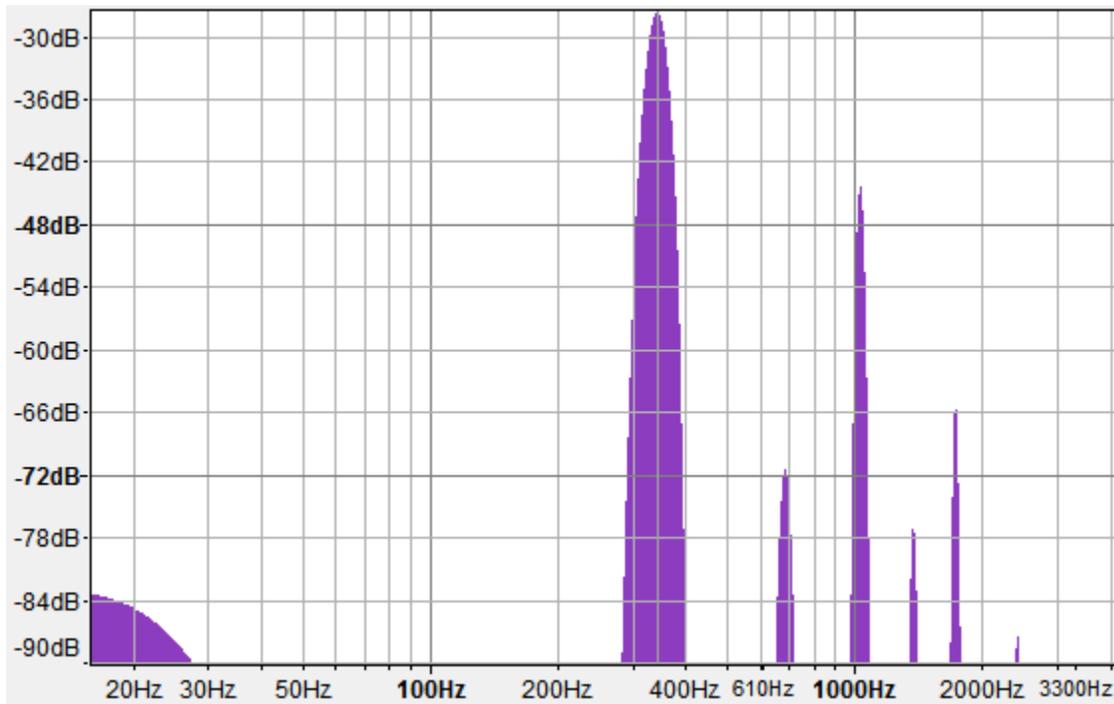


Nota B3

pulsada



Nota E4



E. Tabla de distribución armónica para los 3 métodos

		f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8
Mi E2	Yamaha	82	164	246	327	409	491	573	655	738
	Kps	83	165	248	330	413	495	578	660	743
	Kps ex.	83	165	247	329	411	494	576	658	741
	Guía de onda	84	167	251	335	418	502	586	669	753
Sol G3	Yamaha	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
	Kps	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
	Kps ex.	196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
	Guía de onda	195	391	586	781	976	1171	1367	1562	1757
Mi E4	Yamaha	329	657	986	1315	1645	1975	2302	2634	2962
	Kps	328	656	984	1312	1640	1968	2295	2623	2961
	Kps ex.	328	656	984	1312	1640	1968	2295	2623	2961
	Guía de onda	342	683	1025	1367	1708	2049	2389	2728	3064

F. Cambios de nivel armónico debido a posicionamiento

Guitarra Yamaha C40:

Distancia	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
0.1	-17.06	-21.48	-28.47	-29.12	-43.3	-40.49	-38.51	-38.33	-36.03
0.5	-20	-25	-35.4	-40	-53.6	-66.5	-54.8	-54.4	-50.9
0.7	-16.74	-27.79	-46.5	-42.13	-52.99	-58.14	-61.27	-64.91	-52.54

Algoritmo Karplus-Strong Extendido

Distancia	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
0.1	-32.5	-34.38	-43.5	-52.86	-62.75	-66.81	-69.86	-59.02	-67.87
0.5	-42	-37.8	-47.7	-60.2	-65.4	-70.6	-67.3	-66.3	-80.1
0.7	-35.43	-41.362	-50.4	-55.2	-59.42	-66.1	-70.3	-72.81	-73.47

Algoritmo por guía de onda

Distancia	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
0.1	-35.57	-51.89	-47.27	-68.18	-82.94	-81.6	-105.33	-98.4	-116.47
0.5	-38	-89.6	-50	-88	-91.6	-91	-112.5	-100.3	-87
0.7	-31.05	-41.89	-65.99	-76.92	-87.64	-103.99	-107.24	-115.47	-120