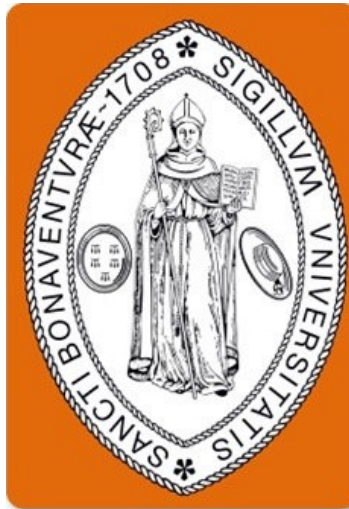


RAE

1. **TIPO DE DOCUMENTO:** Trabajo de grado para optar por el título de INGENIERO MECATRÓNICO.
2. **TÍTULO:** DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y CONTROL DE UN HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.
3. **AUTORES:** Juan Andrés Gutiérrez Sabogal, Édgar Andrés Duarte Arenas.
4. **LUGAR:** Bogotá D.C.
5. **FECHA:** Noviembre de 2014.
6. **PALABRAS CLAVES:** Diseño mecatrónico, Helicóptero DGL, Técnicas de control, Modelado Euler-Lagrange, Grados de libertad, Controlador SISO, Controlador MIMO, Controlador PI vectorial, Birotor.
7. **DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO:** El objetivo de la tesis es construir, modelar y controlar un helicóptero de dos grados de libertad, los cuales le permiten al sistema moverse en los ángulos de Pitch y Yaw. Es un sistema no lineal, de múltiples variables e inestable; razones por las cuales hacen que sea un reto para ser controlado. Con el fin de conseguir un sistema de control con un alto rendimiento y robustez, el helicóptero se controla con varias estrategias y sus resultados se comparan para identificar la que tiene mejor rendimiento. Las estrategias de control utilizadas son: el control *Single Input Single Output* ("SISO") *Proportional Integral Derivative* ("PID"), *Multiple input Multiple output* ("MIMO") PID con desacople "*Cross-Control*" y *State Servottracking*, control en variables de estado con un observador de estado Luenberger "PI Vectorial con observador de estado".
8. **LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:** Grupo de investigación: Solsytec, Línea de investigación de la USB: Control. Campo temático del programa: Diseño, Construcción y Control.
9. **METODOLOGÍA:** Es de carácter empírico-analítico, con un enfoque metodológico con base en el estudio y diseño de un helicóptero de dos grados de libertad.
10. **CONCLUSIONES:** En este trabajo se propuso y se validó la construcción, el modelamiento y el control de un helicóptero de dos grados de libertad, sistema multivariable, inestable y no lineal. El helicóptero construido demostró confiabilidad, mostrando buenos resultados de funcionamiento, permitiendo visualizar los efectos naturales que rigen al sistema. Para este trabajo se tuvieron que hacer pruebas exhaustivas, lo que permitió dar un buen diagnóstico de funcionamiento. El modelamiento del sistema usando las ecuaciones diferenciales de lagrange, permitió realizar satisfactoriamente un análisis completo de todo el sistema, donde todas las variables físicas se relacionaron para tener un mayor acercamiento a la planta real y obtener mejores resultados a la hora de ser controlado, demostrando ser un modelamiento ideal para aplicar técnicas de control multivariable en espacio de estados. En conclusión, se cumplieron con todos los objetivos planteados en este trabajo de grado, demostrando buenos resultados de ejecución en todas las áreas: mecánica, modelado y control. Este trabajo aporta grandes resultados, los cuales podrán usarse en futuros trabajos y aplicaciones ingenieriles, no solo en el campo de la ingeniería mecatrónica sino también en la aeronáutica. Por último es preciso mencionar que se deben limitar los rangos de trabajo del módulo de control a 75 grados para Pitch y 180 grados para Yaw, ya que si no es así, se atenta con la estabilidad del sistema, este módulo se diseñó siguiendo los parámetros de una helicóptero real, lo que indica que no está diseñado a seguir referencias extremas.

DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y CONTROL DE UN HELICÓPTERO
DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

JUAN ANDRÉS GUTIÉRREZ SABOGAL
ÉDGAR ANDRÉS DUARTE ARENAS



Proyecto de grado presentado para optar
al título de ingenieromecatrónico

Director:
Ing. Roberto Bohorquez Avila.

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA
FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERÍA MECATRÓNICA
BOGOTÁ, D.C.
2014

Nota de aceptación:

Firma Director

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá D.C. 7 de Noviembre del 2014

Agradezco a Dios primero que todo, por sus bendiciones y por brindarme la fortaleza para sobrellevar este gran desafío. A mi madre y hermanos por sus oraciones, consejos, cariño, por llenar mi alma de vigor y amor. A todos aquellos que desde el principio creyeron en mí y hasta el día de hoy siguen dándome consejos alentadores para seguir alcanzando mis metas.

Juan A. Gutiérrez Sabogal

Dedicado a Dios quien me guio por el buen camino y dio fuerzas para seguir adelante.

A mis padres, por su amor, su trabajo, su sacrificio en todos estos años y apoyarme siempre en mis sueños e ideales. A mi hermana por estar siempre presente, acompañándome y apoyándome incondicionalmente, también a mi sobrino Jerónimo quien ha sido, es y será parte de mi motivación, inspiración y felicidad. Con todo mi cariño y amor para mi familia, mi novia Viviana y mis grandes amigos que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños.

A la memoria de Ivan Duarte mi padre.

Édgar Andrés

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. DESCRIPCIÓN GENERAL	14
2. OBJETIVOS	15
2.1. OBJETIVO GENERAL	15
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
3. MARCO TEÓRICO	16
3.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER-LAGRANGE	16
3.2. COORDENADAS GENERALIZADAS	17
3.3. GRADOS DE LIBERTAD	17
3.4. MOVILIDAD EN AERONAVE <i>PITCH</i> , <i>ROLL</i> Y <i>YAW</i>	18
3.5. AERODINÁMICA DE UN HELICÓPTERO	19
3.6. DINAMICA HÉLICE	19
3.7. FUERZA TRANSVERSAL O DE CORIOLIS	20
3.8. POTENCIOMETRO LINEAL	21
3.9. MATLAB-SIMULINK	22
3.10. ZIEGLER & NICHOLS	22
3.11. SISTEMA DE CONTROL SISO	23
3.11.1. Ganacia proporcional	24
3.11.2. Ganacia integral	24
3.11.3. Ganacia derivativa	24
3.12. SISTEMA DE CONTROL MIMO <i>CROSS-CONTROL</i> POR DESACOPLE	25
3.13. ESPACIO DE ESTADOS	25
3.14. CONTROLABILIDAD	26
3.15. OBSERVABILIDAD	27
3.16. CONTROL POR RETTROALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO (“RVE”)	27
3.17. OBSERVADOR DE ESTADO	28
3.18. LINEALIZACIÓN	29
3.19. <i>PULSE-WIDTH MODULATION</i> “PWM”	29
3.20. ANTECEDENTES	30
4. DESARROLLO INGENIERIL	36
4.1. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA	36
4.1.1. Sensores	36
4.1.2. Actuadores	37
4.1.3. Adquisición de datos	38

4.2. DISEÑO MECÁNICO	41
4.2.1. Esfuerzo en la viga	41
4.2.2. Esfuerzos en el soporte de la viga	43
4.2.3. Selección del material	46
4.2.4. Selección de los rodamientos	47
4.2.5. Vida útil rodamientos	48
4.2.6. Características de los materiales	50
4.2.7. Teorema de ejes paralelos	51
4.3. CONSTRUCCIÓN	52
4.4. APROXIMACIÓN LINEAL DEL EMPUJE DE LAS HÉLICES	55
4.5. MODELO MATEMÁTICO GENERAL UTILIZANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER-LAGRANGE	63
4.5.1. Linealización del modelo matemático.	68
4.6. DISEÑO DE CONTROLADORES	71
4.6.1. Controlador SISO	72
4.7. SISTEMA DE CONTROL MIMO <i>CROSS-CONTROL</i> POR DESACOPLE	79
4.8. CONTROL PI VECTORIAL	85
4.8.1. Sin observador de estado.	85
4.8.2. Con observador de estado.	87
4.8.3. Controlador	89
5. RESULTADOS Y ANÁLISIS	98
6. CONCLUSIONES	101
BIBLIOGRAFÍA	102
7. ANEXOS	105

LISTA DE TABLAS

	pág.
1. Características sensores.	36
2. Características Motores.	37
3. Comparación materiales para viga.	46
4. Comparación rodamientos.	47
5. Materiales seleccionados.	50
6. Empuje vertical.	56
7. Fuerza transversal.	56
8. Empuje vertical linealización.	58
9. Fuerza transversal linealización.	58
10. Empuje vertical.	58
11. Fuerza transversal.	59
12. Empuje horizontal.	60
13. Empuje vertical linealización.	61
14. Arreglo de Routh Hurwitz θ_1 .	73
15. Arreglo de Routh Hurwitz θ_2 .	76
16. Sintinización constantes PID.	81
17. Resultados entre controladores.	98
18. Resultados a la Perturbación.	98

LISTA DE FIGURAS

	pág.
1. Helicóptero de dos grados de libertad.	14
2. Ángulos de movilidad.	18
3. Sustentación de un helicóptero.	19
4. Par motor.	20
5. Reóstato o Potenciómetro.	21
6. Comportamiento de potenciómetros.	21
7. Sistema sin control.	23
8. Sistema de control.	23
9. Algebra de bloques control MIMO.	25
10. Algebra de bloques a planta con observador.	28
11. Modulación de ancho de pulso PWM.	30
12. Máquina de Leonardo Da Vinci.	31
13. Helicóptero QUANSER de 2 grados de libertad.	31
14. Planta construida por Arely Ruiz.	33
15. Circuito de Molienda-Clasificación.	34
16. Componentes motor ESC.	38
17. Diagrama de conexión en Simulink.	39
18. Módulo de componentes electrónicos.	40
19. Esquema de conexiones.	40
20. Esfuerzos en la viga.	41
21. Esfuerzos y momentos en la viga.	42
22. Esfuerzos sobre la viga.	44
23. Centro de mecanizado CNC.	52
24. Rodamiento acoplado.	53
25. Acoplamiento superior.	53
26. Módulo de Control HDGL.	54
27. Prueba de empuje.	55
28. Sensores.	55
29. Empuje Vertical.	56
30. Fuerza Transversal.	57
31. Empuje Vertical Linealización.	59
32. Fuerza Transversal Linealización.	60
33. Empuje horizontal.	61
34. Empuje Vertical Linealización.	62
35. Fuerzas que actúan en el sistema.	63
36. Coordenadas generalizadas en m_1 .	64
37. Coordenadas generalizadas en m_2 .	66
38. Diagrama de bloques lazo cerrado.	73

39.Oscilaciones Sostenidas de $G_{\theta_1}s$.	74
40.Respuesta a un escalón.	75
41.Oscilaciones Sostenidas de $G_{\theta_2}s$.	76
42.Respuesta a un escalón.	77
43.Controlador SISO en Simulink.	78
44.Respuesta del ángulo Pitch.	78
45.Respuesta del ángulo Yaw.	79
46.Estructura de MIMO desacoplado.	79
47.Controlador MIMO por desacople en Simulink.	81
48.Respuesta de Pitch a la referencia.	82
49.Respuesta de Yaw a la referencia.	82
50.Controlador MIMO en Simulink.	83
51.Estructura interna controlador MIMO en Simulink.	83
52.Respuesta del ángulo Pitch.	84
53.Respuesta del ángulo Yaw.	84
54.Estructura del controlador PI Vectorial.	85
55.Estructura del controlador PI V con observador de estado.	87
56.Estructura de bloques referencia Pitch.	93
57.Respuesta al Controlador PIV referencia Pitch.	93
58.Estructura de bloques referencia Yaw.	94
59.Respuesta al Controlador PIV referencia Yaw.	94
60.Estructura de bloques referencia Pitch y Yaw.	95
61.Respuesta al Controlador PIV referencia Pitch y Yaw.	95
62.Control PI Vectorial en Simulink.	96
63.Respuesta del angulo Pitch al seguimiento de una referencia.	96
64.Respuesta del angulo Yaw al seguimiento de una referencia.	97
65.Respuesta de controladores ángulo Pitch.	99
66.Respuesta de controladores ángulo Yaw.	99

NOMENCLATURA

$m_{1,2}$	Masas de los extremos de la viga.
R_B	Fuerza de soporte.
M	Momento en la viga.
S_y	Resistencia a la fluencia.
D_{ex}	Diámetro mínimo del extremo.
V	Fuerza aplicada.
n	Factor de seguridad.
T	Torque
D_{centro}	Diámetro del centro de la viga
A	Área de la viga.
D	Diametro de la viga.
σ	Momento flector.
c	Radio de de viga.
δ	Cortante.
$\sigma_{1,3}$	Momento flector máximo, mínimo.
L_1	Nº de ciclos de prueba.
L_2	Ciclos utiles.
P_1	Carga nominal.
P_2	Carga de diseño.
k	Tipo de rodamiento.
w	Velocidad del rodamiento.
t	Vida útil del rodamiento.
I_c	Inercia del centroide.
I_A	Inercia del extremo A.
I_B	Inercia del extremo B.
I_T	Inercia total.
m_v	Masa de la viga.
$d_{1,2}$	Distancias desde el centro a los extremos.
$F_{1,6}$	Fuerza actuantes en el sistema
$\theta_{1,2}$	Ángulo de pitch y yaw.
$X_{1,2}$	Descomposición de $m_{1,2}$ en el plano X.
$Y_{1,2}$	Descomposición de $m_{1,2}$ en el plano Y.
$Z_{1,2}$	Descomposición de $m_{1,2}$ en el plano Z.
$\dot{r}_{1,2}$	Velocidad de la masa 1 y 2.
$T_{1,2}$	Energía cinética de la masa 1 y masa 2.
$V_{1,2}$	Energía potencial de la masa 1 y masa 2.
V_T	Energía potencial total.
T_T	Energía cinética total.
L	Ecuación de Lagrange.
$\beta_{1,2}$	Viscocidad cinematica de Pitch y Yaw.

$\tau_{1,2}$	Torque de Pitch y Yaw.
$G_{\theta_{1,2}S}$	Función de transferencia continua 1 y 2.
$P(s)$	Polinomio característico.
K_p	Ganancia proporcional.
K_i	Ganancia integral.
K_d	Ganancia derivada.
T_i	Tiempo de integración.
T_d	Tiempo de derivación.
K_{cr}	Ganancia crítica
T_{cr}	Tiempo crítico
$K_{11,12,21,22}$	Ganacias del controlador
$G_{11,12,21,22}$	Funciones de transferencia
x	Planta real
$\dot{x}$	Derivada de la planta real
$\hat{x}$	Estimador
$\tilde{x}$	Derivada de la estimación
$\dot{e}x$	Error entre controlador y observador
Q	Observabilidad
Co	Controlabilidad

RESUMEN

El objetivo de la tesis es construir, modelar y controlar un helicóptero de dos grados de libertad, los cuales le permiten al sistema moverse en los ángulos de Pitch y Yaw. Es un sistema no lineal, de múltiples variables e inestable; razones por las cuales hacen que sea un reto para ser controlado. Con el fin de conseguir un sistema de control con un alto rendimiento y robustez, el helicóptero se controla con varias estrategias y sus resultados se comparan para identificar la que tiene mejor rendimiento. Las estrategias de control utilizadas son: el control *Single Input Single Output* (“SISO”) *Proportional Integral Derivative* (“PID”), *Multiple input Multiple output* (“MIMO”) PID con desacople “*Cross-Control*” y *State Servotracking*, control en variables de estado con un observador de estado Luenberger “PI Vectorial con observador de estado”.

Abstract—*The objective of this work is to build, model and control a helicopter of two degrees of freedom. Those degrees of freedom allow the helicopter to be positioned in pitch and Yaw angles. This system has special characteristics that made it a challenge to be controlled; because, it is a non-linear, multi-variable and unstable system. In order to get a control system with a high performance and robustness, the helicopter is controlled with several strategies and their results are compared to identify the best. The control strategies used are Single Input Single Output (“SISO”) Proportional Integral Derivative (“PID”) control, Multiple Input Multiple Output (“MIMO”) PID control with decoupling “Cross-Control” and State Servotracking control with a state observer.*

INTRODUCCIÓN

En el mundo de la industria, constantemente se han venido desarrollando nuevos métodos y teorías de control, que datan desde inicios del siglo XX, los cuales contribuyeron fuertemente en el avance tecnológico que se dio en la segunda guerra mundial. Desde entonces se han mejorado progresivamente las teorías de control implementadas en la náutica y en la aeronáutica, proporcionando a los procesos industriales mayor eficiencia y la erradicación de trabajos excesivamente forzosos como los evidenciados en la revolución industrial. Posteriormente el avance de la electrónica permitió que existiera, no solo el control clásico, si no la introducción a las nuevas teorías del control digital avanzado (Moderno).

Actualmente el control hace parte de los fundamentos de la ingeniería, dando a esta un gran privilegio dado que estas teorías permiten dar soluciones más eficientes a problemas, en los que anteriormente solo podían darse con complejos y costosos mecanismos.

Hoy en día todas las industrias enfocadas en la Robótica y la automatización están 100 % ligadas al control, la alta complejidad de los sistemas involucrados en estas áreas no permiten el uso individual de sistemas de una entrada y una salida (SISO) independientemente, ya que los efectos que generan involucran al sistema en general, por esta razón tener una sistema que tenga todas las entradas y salidas integradas y relacionadas entre sí (MIMO) es crucial para el correcto funcionamiento de la planta. Por lo anterior, plantear y diseñar técnicas de control tipo MIMO en plantas de múltiples variables, inestables y no lineales son una excelente opción para visualizar los efectos que generan una variable con respecto a otra y así dar una solución a estos problemas.

Dado a que este trabajo mantiene una postura científica, ligada a la implementación de teorías de control clásico y moderno. se busca implementar un diseño mecatrónica, en donde la parte mecánica y electrónica es fundamental para alcanzar los objetivos de este proyecto. este trabajo no busca solo implementar Diseñar, construir y controlar si no también realizara un análisis del comportamiento de las técnicas de control aplicadas y así dar a conocer cual se adapta a este tipo de sistema multivariables; a su vez el helicóptero de dos grados de libertad se adaptara como módulo de control, en el que futuros usuarios podrán hacer uso del mismo para sus respectivos estudios en ingeniería de control, este contara con su respectiva norma de seguridad, lo que impedira que el usuario se vea afectado físicamente por el comportamiento no lineal del sistema.

Este trabajo quedará apto para realizar futuras pruebas e implementación de técnicas de control más avanzadas y óptimas.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL

El helicóptero de dos grados de libertad (“HDGL”) consta de un cuerpo formado en forma de T para dar una aproximación al movimiento de un helicóptero real como se ve en la figura 1 y cuenta con una base fija, en donde se encuentran todos los componentes de conexión como fuente de poder, dos controladores electrónicos de velocidad “ESC” (Electronic Speed Controllers), circuito de acoplamiento entre los motores, sensores (potenciómetros lineales) y la conexión a la tarjeta de adquisición de National Instruments “PCI 6014 NI” para la adquisición de datos, además cuenta con conectores externos para que cualquier embebido pueda ser utilizado por si la tarjeta PCI 6014 no está disponible.



Figura 1: Helicóptero de dos grados de libertad.¹

La planta tiene dos propulsores acoplados perpendicularmente uno al otro, ambos son motores sin escobillas accionados por una entrada eléctrica. Esto emula la configuración común de un helicóptero con rotor principal y un rotor de cola (rotor antipar). La hélice frontal es la que proporciona el efecto de elevación y su ángulo es pitch. La hélice posterior controla el movimiento de orientación y su ángulo es Yaw. Para conocer la variación de los ángulos se instalaron potenciómetros lineales de 1k ohm. Para realizar cada uno de los grados de libertad se cuenta con rodamientos de bolas de alta durabilidad, los cuales dan una gran autonomía de movilidad para ambos ángulos “Pitch y Yaw”.

El sistema tiene dos características específicas, es un sistema multi-variable y genera dos fuerzas transversales llamadas coriolis generadas cuando los motores están realizando el empuje, por lo tanto; el efecto de torsión inherente de la hélice delantera hace que el cuerpo gire y debe ser compensado por el rotor de cola y viceversa, al igual que en los helicópteros de tamaño real, que puede hacer desafiante e interesante el modelado y control de tan complejo sistema.

¹Fuente: Diseñado por los autores

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

1. Diseñar, construir y controlar un helicóptero de dos grados de libertad.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Diseñar y construir el sistema mecánico de una planta tipo helicóptero dos grados de libertad.
2. Obtener el modelo dinámico de la planta tipo helicóptero por las ecuaciones diferenciales de movimiento de Euler-Lagrange.
3. Diseñar e implementar el control PID SISO y de desacoplamiento cruzado MIMO.
4. Diseñar e implementar el control PI vectorial con observador de estado.
5. Evaluar los controladores en el módulo de control.
6. Comparar las diferentes técnicas de control e identificar el método que mejor se acople al sistema.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange son herramientas matemáticas que permiten describir los fenómenos específicos en un sistema y tienen gran utilidad cuando el sistema tiene un comportamiento no lineal, como por ejemplo un helicóptero de dos grados de libertad.

Realizando un balance energético del sistema entre la energía cinética del objeto, menos la energía potencial del mismo. La formulación Lagrangiana simplifica considerablemente gran mayoría de problemas físicos.

La mecánica newtoniana se describe por medio de las ecuaciones diferenciales de Lagrange, también conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange; las cuales permiten contar con un sistema analítico para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento físico del sistema [1].

La fórmula general de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i$$

Donde q_i es el tensor métrico del espacio euclídeo expresado en las coordenadas generalizadas correspondientes, que sólo depende de las propias coordenadas de las velocidades $\dot{q}_i$.

Las coordenadas generalizadas pueden representar una carga eléctrica o flujo magnético, desplazamiento lineal o angular, que muestra que no están restringidas a sistemas físicos y corresponden a cada grado de libertad del sistema [2].

Las variables de la ecuación (3.1) son:

- q_i es la coordenada generalizada de la junta i .
- $L = T - V$ es el lagrangiano.
- T es la energía cinética del sistema.
- V es la energía potencial del sistema.
- $R = \frac{1}{2}\beta_i\dot{\theta}_i^2$ es la variable Rayleigh, usada para manejar los efectos de la velocidad proporcional a las fuerzas de fricción encontradas en el lagrangiano.

- β_i es la viscosidad encontrada en la junta i .
- τ_i es el torque de entrada encontrado en la junta i .

3.2. COORDENADAS GENERALIZADAS

Se le denominan coordenadas generalizadas "a un conjunto cualquiera de parámetros $q_i; i = 1; 2, \dots, n$, que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema".²

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas q_i se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas, δq_i , se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.[3]

3.3. GRADOS DE LIBERTAD

Coordenadas independientes. Grados de libertad. Un conjunto mínimo necesario y suficiente de coordenadas generalizadas para describir la configuración de un sistema mecánico se denomina conjunto de coordenadas independientes (ci). Si bien para un cierto sistema se puede definir diversos conjuntos de coordenadas independientes, la dimensión de estos conjuntos es una característica del sistema y se denominan número de coordenadas independientes.

Cualquier número mínimo necesario y suficiente de velocidades generalizadas que describen la distribución de velocidades del sistema se denomina conjunto de grados de libertad (gl). La dimensión de estos conjuntos es también una característica del sistema y se denominan número de grados de libertad.

Desde un punto de vista intuitivo, se asocian los grados de libertad a los movimientos independientes a corto término que puede realizar el sistema, y las coordenadas independientes a los movimientos a largo término.

²Fuente: Teoría de máquinas. Primera edición. Barcelona, España: Editorial CPDA, 2001. p. 33 - 40.

El numero de grados de libertad y el numero de coordenadas independientes de un sistema no tienen por qué coincidir, si bien en la mayoría de los mecanismos coinciden. Es por eso que a menudo en el ámbito de la teoría de máquinas y mecanismos se obvia la diferencia y se habla de “numero de grados de libertad de un mecanismo” o bien de “movilidad de un mecanismo”, para referirse tanto a velocidades como a coordenadas independientes. [3]

3.4. MOVILIDAD EN AERONAVE *PITCH, ROLL Y YAW*

Se trata de rectas imaginarias e ideales trazadas sobre el avión. Su denominación y los movimientos que se realizan alrededor de ellos son los siguientes:

Eje longitudinal. Es el eje imaginario que va desde el morro hasta la cola del avión. El movimiento alrededor de este eje (levantar un ala bajando la otra) se denomina alabeo (en inglés "Roll"). También se le denomina eje de alabeo o balance, nombre que parece más lógico pues cuando se hace referencia a la estabilidad sobre este eje, es menos confuso hablar de estabilidad de alabeo que de estabilidad "transversal".



Figura 2: Ángulos de movilidad.³

Eje transversal o lateral. Eje imaginario que va desde el extremo de un ala al extremo de la otra. El movimiento alrededor de este eje (morro arriba o morro abajo) se denomina cabeceo ("Pitch" en inglés). También denominado eje de cabeceo, por las mismas razones que en el caso anterior. Eje vertical. Eje imaginario que atraviesa el centro del avión. El movimiento en torno a este eje (morro virando a la izquierda o la derecha) se llama guiñada ("Yaw" en inglés). Denominado igualmente eje de guiñada.

En un sistema de coordenadas cartesianas, el eje longitudinal o de alabeo sería el eje "x"; el eje transversal o eje de cabeceo sería el eje "y", y el eje vertical o eje de guiñada

³Fuente: Tomada el 6 de Noviembre de 2014. Disponible en <http://www.aena.es/img/flash/aeronaves06.jpg>

sería el eje "z". El origen de coordenadas de este sistema de ejes es el centro de gravedad del avión.[4]

3.5. AERODINÁMICA DE UN HELICÓPTERO

En un avión, las alas se encargan de la sustentación, mientras que en un helicóptero la hélice aporta la propulsión. El área circular definida por la rotación de las palas se llama "rotor principal", está hélice empuja el aire hacia abajo y el helicóptero asciende. Es una aeronave de alas giratorias (rotor) que proporcionan:

- Sustentación
- Propulsión
- Control

Si se inclina el rotor principal, el helicóptero se moverá en la dirección de la inclinación. Si el rotor principal gira, una fuerza igual y contraria hace girar al fuselaje del helicóptero en el sentido inverso. El rotor de cola compensa este par, también permite a la aeronave mantenerse en vuelo en un punto fijo sin necesidad de una velocidad de vuelo que genere estas fuerzas [5].

3.6. DINAMICA HÉLICE

Los perfiles aerodinámicos que componen una hélice están sujetos a las mismas leyes y principios que cualquier otro perfil aerodinámico, por ejemplo un ala. Cada uno de estos perfiles tiene un ángulo de ataque, respecto al viento relativo de la pala que en este caso es cercano al plano de revolución de la hélice, y un paso (igual al ángulo de incidencia). El giro de la hélice, simula la rotación de muchas pequeñas alas, acelera el flujo de aire hacia el borde de salida de cada perfil, a la vez que deflecta éste hacia atrás (lo mismo que sucede en un ala). Tal proceso da lugar a la aceleración hacia atrás de una gran masa de aire, movimiento que provoca una fuerza de reacción que es la que propulsa el avión hacia adelante.

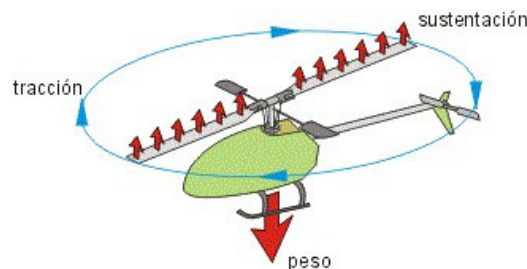


Figura 3: Sustentación de un helicóptero.⁴

⁴Fuente: Tomada el 20 de Octubre de 2014. Disponible en [http://skytechnologies.net/images/fuerzas %20helicopero %2002.gif](http://skytechnologies.net/images/fuerzas%20helicopero%2002.gif)

La fuerza de propulsión del aeroplano está directamente relacionada con la cantidad de aire que mueve y la velocidad con que lo acelera; depende por tanto del tamaño de la hélice, de su paso, y de su velocidad de giro. Su diseño, forma, número de palas, diámetro, etc... debe ser el adecuado para la gama de velocidades en que puede operar el avión. Una hélice bien diseñada puede dar un rendimiento de hasta 0,9 sobre un ideal de 1.

Con independencia del número de palas (2, 3, 4...), las hélices se clasifican básicamente en hélices de paso fijo y hélices de paso variable. Se denomina paso de la hélice al ángulo que forma la cuerda de los perfiles de las palas con el plano de rotación de la hélice [6].

3.7. FUERZA TRANSVERSAL O DE CORIOLIS

La tercera ley de movimiento de Newton establece que por cada acción hay una reacción igual pero opuesta. Cuando el rotor principal de un helicóptero gira, hace que el cuerpo del helicóptero gire hacia el lado contrario como se ve en la Figura 4, a esto se denomina torsión. El rotor de cola, o rotor anti par, es un componente típico en las aeronaves que tienen un único rotor principal que consiste en una hélice montada en la parte posterior del helicóptero, con un eje de rotación lateral. El empuje que crea contrarresta el par motor creado por el rotor principal, manteniendo el aparato estable en el aire [7].

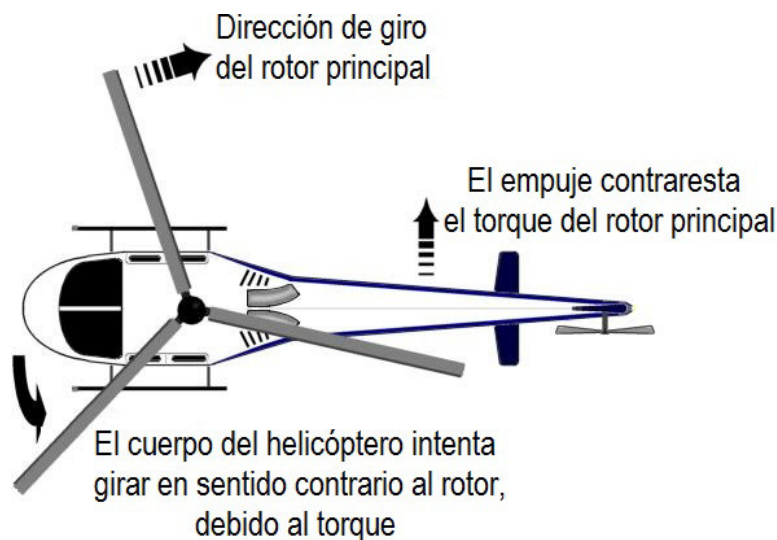


Figura 4: Par motor.⁵

⁵Fuente: Tomada el 18 de Octubre de 2014. Disponible en <http://www.nitroylitio.com/web/images/stories/articulos/direccionheli.jpg>

3.8. POTENCIOMETRO LINEAL

Partiendo de la definición de Resistencia: Los potenciómetros limitan el paso de la corriente eléctrica (Intensidad) provocando una caída de tensión en ellos al igual que en una resistencia, pero en este caso el valor de la corriente y la tensión en el potenciómetro las podemos variar solo con cambiar el valor de su resistencia. En una resistencia fija estos valores serían siempre los mismos. El potenciómetro más sencillo es una resistencia variable mecánicamente. Los primeros potenciómetros y más sencillos son los reóstatos.

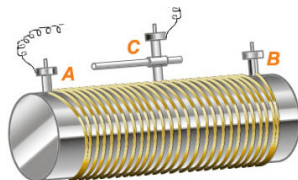


Figura 5: Reóstato o Potenciómetro.⁶

Fíjese que la resistencia es el hilo conductor enrollado. Se tienen 3 terminales A, B y C si conectan los terminales A y B al circuito, sería una resistencia fija del valor igual al máximo de la resistencia que podría tener el reóstato. Ahora bien se conectan los terminales A y C el valor de la resistencia dependería de la posición donde estuviera el terminal C, que se puede girar en cualquier dirección. Este reóstato o potenciómetro es variable mecánicamente.

La ley de variación de un resistor variable es la función que liga la resistencia entre un terminal fijo y el cursor en función de la variable mecánica que define la posición del cursor $\beta = \beta(\theta)$, en pocas palabras hace que la resistencia sea proporcional al ángulo de giro del potenciómetro. Donde θ puede ser: ángulo, distancia o número de vueltas y K es la constante que determina el valor del potenciómetro lineal.[8]

$$\begin{aligned}\beta &= k\theta && \text{Lineal} \\ \beta &= k \log(\theta) && \text{Logarítmica} \\ \beta &= k e^{\theta} && \text{Exponencial}\end{aligned}$$

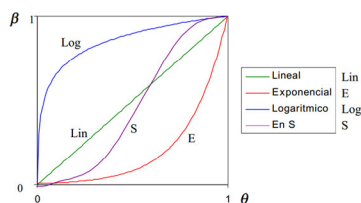


Figura 6: Comportamiento de potenciómetros.⁷

⁶Fuente: Tomada el 18 de Agosto de 2014. Disponible en <http://www.areatecnologia.com/electronica/imagenes/reostato.jpg>

⁷Fuente: Tomada el 18 de Agosto de 2014. Disponible en http://www.uib.cat/depart/dfs/GTE/education/industrial/tec_electronica/teoria/resistores_variables.pdf

3.9. MATLAB-SIMULINK

Matlab es un programa de gran aceptación en ingeniería en el que se realizan cálculos técnicos científicos y de propósito general. En él se integran operaciones de cálculo, visualización y programación, donde la interacción con el usuario emplea una notación matemática clásica.

Los usos y aplicaciones típicos de Matlab son:

- Matemáticas y cálculo.
- Desarrollo de algoritmos.
- Adquisición de datos.
- Modelado, simulación y prototipado.
- Análisis y procesamiento de datos.
- Gráficos científicos y de ingeniería.
- Desarrollo de aplicaciones.

El tipo básico de variable con el que trabaja Matlab es una matriz que no requiere ser dimensionada previamente en la declaración. Una de las características más interesantes consiste en que el álgebra vectorial y matricial se expresa con la misma sintaxis que las operaciones aritméticas escalares.

Simulink es una aplicación que permite construir y simular modelos de sistemas físicos y sistemas de control mediante diagramas de bloques. El comportamiento de dichos sistemas se define mediante funciones de transferencia, operaciones matemáticas, elementos de Matlab y señales predefinidas de todo tipo, además dispone de una serie de utilidades que facilitan la visualización, análisis y guardado de los resultados de simulación. La herramienta computacional se emplea profusamente en ingeniería de control [9].

3.10. ZIEGLER & NICHOLS

Ziegler y Nichols sugirieron dos procedimientos para sintonizar controladores PID basándose respectivamente en la respuesta experimental a un escalón de entrada, o en base al valor de K_p que produce una estabilidad marginal mediante el sólo uso de la acción de control proporcional. Los procedimientos de Ziegler-Nichols son muy convenientes cuando no se conoce un modelo matemático de la planta; naturalmente, estos procedimientos también se pueden aplicar al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.⁸

⁸Fuente: Para mayor profundización remítase OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. México: Editorial Pearson, 1998.

3.11. SISTEMA DE CONTROL SISO

Un sistema dinámico puede definirse conceptualmente como un objeto que recibe unas acciones externas o variables de entrada, y cuya respuesta a estas acciones externas son las denominadas variables de salida. Las acciones externas al sistema se dividen en dos grupos; variables de control que se pueden manipular y perturbaciones sobre las que no es posible ningún tipo de control. La Figura 7 ilustra de un modo conceptual el funcionamiento de un sistema.

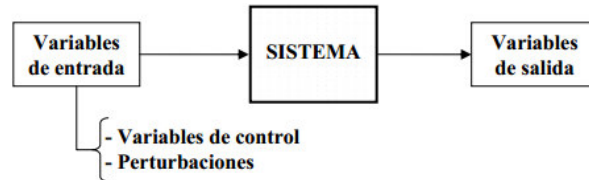


Figura 7: Sistema sin control.⁹

Dentro del esquema se encuentra el concepto de sistema de control, el cual se caracteriza por la presencia de una serie de elementos que permiten influir en el funcionamiento de la planta. La finalidad de un controlador es conseguir mediante la manipulación de las variables de control, un mando sobre las variables de salida, de modo que éstas alcancen unos valores de referencia deseados. Un sistema de control ideal debe ser capaz de conseguir su objetivo cumpliendo las siguientes necesidades:

1. Garantizar la estabilidad y particularmente, ser robusto frente a perturbaciones y errores en los modelos.
2. Ser lo más eficiente posible, lo cual consiste en que la acción de control sobre las variables de entrada sea operable, evitando comportamientos bruscos e irreales.

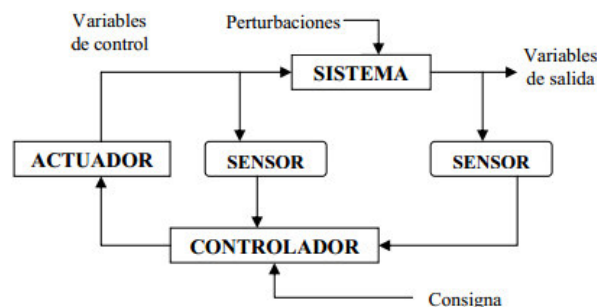


Figura 8: Sistema de control.¹⁰

⁹Fuente: Tomada el 3 de Agosto de 2014. Disponible en <http://thecontrolengineer-ep.wikispaces.com/Control-Sistemas-Variables>

¹⁰Fuente: Tomada el 3 de Agosto de 2014. Disponible en <http://thecontrolengineer-ep.wikispaces.com/Control-Sistemas-Variables>

En la Figura 8 se observa el esquema de funcionamiento de un sistema de control [29], que está compuesto por:

Sensores: Permiten conocer el posicionamiento del sistema con los valores de las variables.

Controlador: Utilizando los valores determinados por los sensores y la consigna o referencia impuesta, calcula la acción que debe aplicarse para modificar las variables de control en base a cierta estrategia.

Actuador: Es el mecanismo que ejecuta la acción calculada por el controlador y que modifica las variables de control.

3.11.1. Ganancia proporcional

El término proporcional produce un valor de salida que es proporcional al valor actual del error. La respuesta proporcional se puede ajustar multiplicando el error por una constante K_P , llamada la ganancia proporcional.

Si la ganancia proporcional es demasiado alta, el sistema puede llegar a ser inestable. Si la ganancia proporcional es demasiado baja, la acción de control puede ser demasiado pequeña al responder a las perturbaciones del sistema. La teoría y la práctica de optimización industrial indican que el término proporcional debe contribuir la mayor parte del cambio en la salida [11].

3.11.2. Ganancia integral

La contribución del término integral es proporcional tanto a la magnitud del error y la duración del error. La integral en un controlador PID es la suma del error instantáneo en el tiempo y da el acumulado desplazamiento correspondiente que se ha corregido previamente. El error acumulado se multiplica entonces por la ganancia integral y se añade a la salida del controlador.

El término integral acelera el movimiento del proceso hacia el punto de ajuste y elimina el error de estado estacionario residual que se produce con un controlador proporcional puro. Sin embargo, dado que el término integral responde a los errores acumulados en el pasado, puede provocar que el valor actual a rebasar el valor deseado [11].

3.11.3. Ganancia derivativa

La derivada del error de proceso se calcula mediante la determinación de la pendiente del error en el tiempo y multiplicando ésta tasa de cambio por la ganancia derivada. La magnitud de la contribución del término derivado de la acción de control en general se denomina la ganancia derivativa.

La acción derivativa predice el comportamiento del sistema y por lo tanto mejora el tiempo y la estabilidad del sistema de sedimentación [11].

3.12. SISTEMA DE CONTROL MIMO *CROSS-CONTROL* POR DESACOPLE

En control de procesos industriales es habitual encontrarse con sistemas con varias entradas y salidas, siendo el caso 2x2 el más tratado en la bibliografía (Vázquez, 2002, Wang & Huang, 2000, Wang, 2003), bien porque corresponde a procesos típicos reales, bien porque el proceso ha sido descompuesto en bloques de este tamaño (Vázquez et al.1999, Morilla & Vázquez. 2002). En la figuras 4 y 5 se muestra una de las posibles estrategias, el control centralizado, bajo dos enfoques diferentes: el primero de ellos combina una red de desacoplo, formada por los cuatro elementos $D_{ij}(s)$, con un controlador descentralizado, compuesto por los dos elementos $K_i(s)$, y el segundo utiliza una red de controladores, formada por los cuatro elementos $K_{ij}(s)$, con filosofía puramente centralizada [12].

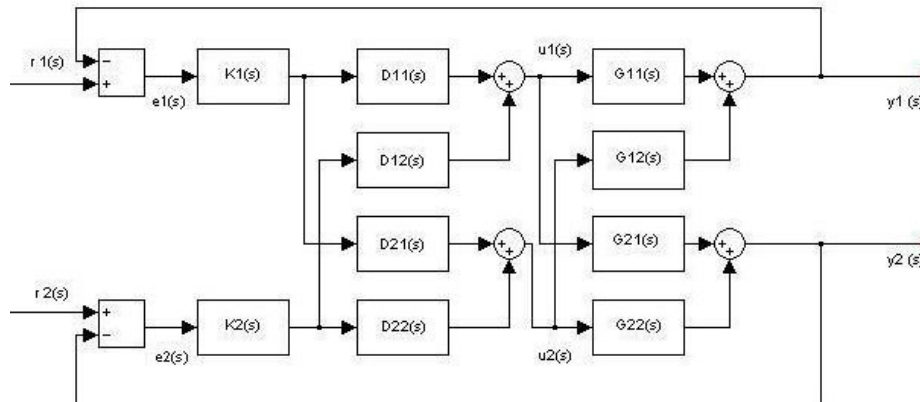


Figura 9: Algebra de bloques control MIMO.¹¹

3.13. ESPACIO DE ESTADOS

La representación en espacio de estado, también conocida como representación interna, fue utilizada en otras disciplinas como la mecánica o termodinámica desde hace largo tiempo. El estado dinámico de un sistema puede ser representado por un conjunto de variables denominadas variables de estado. Este conjunto de variables caracteriza completamente la configuración dinámica actual del sistema. Para esto se requiere de un número mínimo de variables de estado necesarias y suficientes que permiten la descripción dinámica del sistema.

¹¹Fuente: OSPINA ALARCÓN, Manuel. Diseño de un sistema de control multivariable para un circuito de molienda en húmedo. Medellín: 2009.

En una representación por variables de estados de un sistema lineal, con matrices A, B, C y D, las matrices A y C describen el comportamiento no-forzado del sistema (o el comportamiento a entrada-cero), mientras que la matriz B caracteriza el efecto de la entrada (o el control) sobre la dinámica del sistema. La matriz D representa la transmisión directa de la entrada a la salida.[13].

Los sistemas automáticos modernos, a partir de los cuales se desarrolló la representación de estado para el control de procesos, aparecen en los años 60 para permitir el control de sistemas complejos tales como las aplicaciones espaciales Apolo y Polaris, las cuales tienen múltiples entradas y salidas (MIMO), y criterios de funcionamiento cada vez más severos. El uso del espacio de estado para representación de sistemas de control proviene de la capacidad que tiene esta representación de representar sistemas multivariables complejos. Su desarrollo y aplicación crece luego con el uso de los computadores [11].

El conjunto de variables de estado no es único, pero debe estar conformado para cada sistema por un número idéntico de variables de estado independientes, esto significa que la selección de estas variables, así como de sus condiciones iniciales, constituye un conjunto que se puede fijar de forma arbitraria.

El estado inicial del sistema constituye su memoria: dado un estado inicial a un instante dado el conocimiento del pasado no permite el conocimiento del futuro del sistema, se requirió por lo tanto de unas funciones (ecuaciones de estado) que permiten la predicción del futuro, las funciones comúnmente utilizadas son las resultantes de una integración.

3.14. CONTROLABILIDAD

Segun la ecuación de estado $\dot{X} = A_X + B_U$ con las matrices constantes $A \in \mathbb{R}$ Y $B \in \mathbb{R}$. La controlabilidad relaciona las entradas y estados del sistema, la ecuación de salida es irrelevante. La ecuación de estado mencionada, o el par (A,B), se dice controlable si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier estado final $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe una entrada que transfiera el estado x de x_0 a x_1 en tiempo finito. en caso contrario, la ecuacion de estado, o el par (A, B) , se dice no controlable.

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial al cualquier estado final en tiempo finito, no importando qué trayectoria se siga, o qué entrada se use.¹²

¹²Fuente: Para mayor profundización remitase DIAZ, Hernando. Fundamentos de control. Diseño con variables de estado. p. 117-146.

3.15. OBSERVABILIDAD

El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. Consideramos el sistema lineal estacionario.

$$\dot{X} = A_X + B_U \quad y = C_X + D_U$$

para

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}.$$

donde:

$x(t)$: vector de estado (vector de dimensión n)

$u(t)$: vector de control (vector de dimensión p)

$y(t)$: vector de salida (vector de dimensión q)

A : matriz de $n \times n$.

B : matriz de $n \times p$.

C : matriz de $q \times n$.

D : matriz de $q \times p$.

Es observable si para cualquier estado inicial $x(0)$ (desconocido), existe un tiempo finito t_1 tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x(0)$. En caso contrario el sistema es no observable.¹³

3.16. CONTROL POR RETTROALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO (“RVE”)

La Principal configuración de control, basada en variables de estado, utiliza una señal de control de la forma

$$u(t) = r(t) - Gx(t) \quad (3.1)$$

donde G es una matriz de ganancia de dimensión $m \times n$. esta configuración se llama “Realimentación de variables de estado” RVE”. Usando la ecuación de estado 3.2 y reemplazando la ecuación 3.1

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_X(t) + B_U(t) \\ &= A_X(t) + B(r(t) - Gx(t)) \\ &= (A - BG)_x(t) + Br(t) \\ &= A_{LC}x(t) + Br(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹³Fuente: Para mayor profundización remitase DIAZ, Hernando. Fundamentos de control. Diseño con variables de estado. p. 117-146.

donde $A_L C = A - BG$ es la matriz de estado de lazo cerrado.

Puesto que la dinámica del sistema depende fundamentalmente de la matriz de estado, se observa en esta ecuación que es posible cambiar el comportamiento del sistema usando esta ley de control.¹⁴

3.17. OBSERVADOR DE ESTADO

El control con realimentación de estados asume la disponibilidad de las variables de estado. Este puede no ser el caso en la práctica, ya sea porque ciertos estados no son medibles, o es muy difícil o muy caro medirlos. Para implementar una realimentación de estados, entonces, debemos diseñar un dispositivo dinámico, llamado *observador o estimador de estados*, cuya salida sea una estima del vector de estados. En los observadores de orden completo, el observador tiene el mismo orden que la planta es decir, estimamos todo el vector de estados. Denotamos con $\hat{x}(t)$ a la estima de $x(t)$. Considerando entonces el sistema

$$\dot{X} = A_X(t) + B_U(t) \quad (3.3)$$

$$y = C_X(t) \quad (3.4)$$

donde A,B y C son conocidos y la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ son medibles, aunque no el estado $x(t)$. El problema es estimar $x(t)$ de esta información[14].

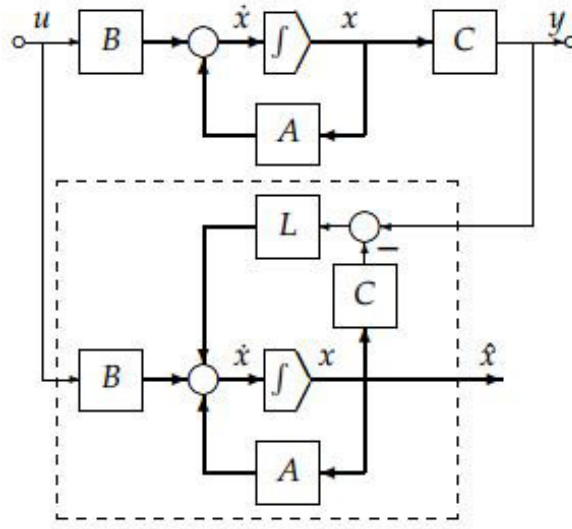


Figura 10: Algebra de bloques a planta con observador.¹⁵

¹⁴Fuente: Para mayor profundización remítase DIAZ, Hernando. Fundamentos de control. Diseño con variables de estado. p. 117-146.

¹⁵Fuente: Para mayor profundización Realimentación de estados y observadores. p. 144-193

La imagen 10 muestra como esta configurada con algebra de bloques una planta en variables de estado con su respectivo estimados de estados (A, B y C).

3.18. LINEALIZACIÓN

En ingeniería de control, una operación normal del sistema puede ocurrir alrededor de un punto de equilibrio. Y las señales pueden considerarse señales pequeñas alrededor del equilibrio. (Debe señalarse que hay muchas excepciones a tal caso.) Sin embargo, si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal. Este sistema lineal es equivalente al sistema no lineal, considerado dentro de un rango de operación limitada. Tal modelo linealizado (lineal e invariante con el tiempo) es muy importante en la ingeniería de control. Con la finalidad de obtener una aproximación lineal para los sistemas no lineales se realizan las derivadas parciales al sistema y se evalúan en $x_1 = \bar{x}_1, \bar{x}_2 = \bar{x}_2$. Cerca del punto de operación normal, es posible no considerar los términos de orden superior [10]

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} & \frac{\partial F_2}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3}{\partial X_3} & \frac{\partial F_3}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \frac{\partial F_4}{\partial X_2} & \frac{\partial F_4}{\partial X_3} & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{bmatrix}$$

Matriz de linealización con sus respectivas derivadas parciales.

3.19. *PULSE-WIDTH MODULATION* “PWM”

La técnica PWM (*Pulse Width Modulation*) o modulación por anchura del pulso de una señal o fuente de energía es una técnica en la que se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica (una señal senoidal o una cuadrada), ya sea para transmitir información a través de un canal de comunicaciones o para controlar la cantidad de energía que se envía a una carga [15].

La construcción típica de un circuito PWM se lleva a cabo mediante un comparador con dos entradas y una salida. Una de las entradas se conecta a un oscilador de onda de dientes de sierra, mientras que la otra queda disponible para la señal moduladora. En la salida la frecuencia es generalmente igual a la de la señal dientes de sierra y el ciclo de trabajo está en función de la portadora.

La modulación por ancho de pulsos es una técnica utilizada para regular la velocidad de giro de los motores eléctricos de inducción o asíncronos. Mantiene el par motor

constante y no supone un desaprovechamiento de la energía eléctrica. Se utiliza tanto en corriente continua como en alterna, como su nombre lo indica, al controlar: un momento alto (encendido o alimentado) y un momento bajo (apagado o desconectado), controlado normalmente por relés (baja frecuencia) o MOSFET o tiristores (alta frecuencia).

Otra forma de regular el giro del motor es variando el tiempo entre pulsos de duración constante, lo que se llama modulación por frecuencia de pulsos. El ciclo de actividad (o duty cycle, DC) representa la anchura del pulso: cuánto tiempo de cada onda cuadrada hay pulso (5V) y cuándo no lo hay (0V) como se ve en la Figura 11.

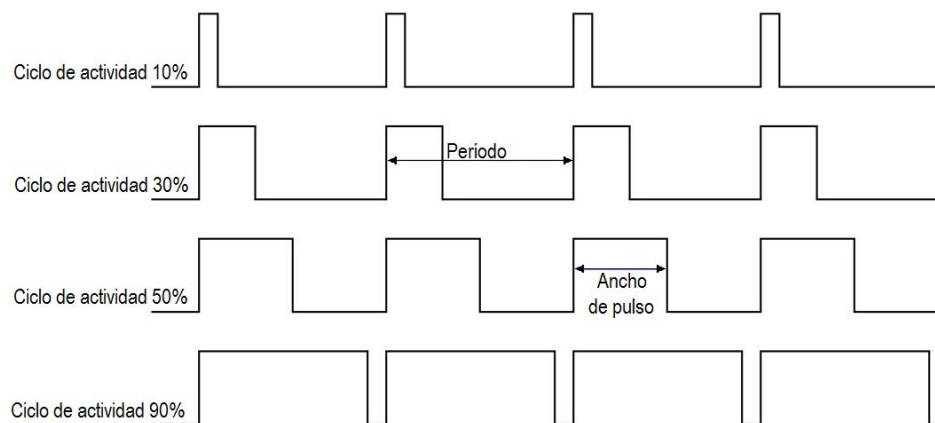


Figura 11: Modulación de ancho de pulso PWM.¹⁶

Para obtener el ciclo de actividad de la señal se realiza el siguiente calculo.

$$\text{Ciclo de actividad} = \frac{\text{Ancho de pulso} \times 100\%}{\text{Periodo}}$$

3.20. ANTECEDENTES

Inicialmente los chinos en el año 400 A. C. crearon un trompo volador, el cual radicaba en una vara con una hélice insertada en un extremo, que al bailar entre las manos se elevaba y giraba velozmente. Es el primer antecedente que se conoce de un helicóptero [16].

En 1490 en la época del renacimiento, Leonardo da Vinci realizó el primer diseño y dibujo unos esquemas de una máquina voladora con un rotor, pero hasta después del siglo XX ya con los aviones motorizados se iniciaron los estudios en una nave como la trabajada en este trabajo de grado. El esquema de la máquina dibujada por Leonardo se ve en la Figura 12 [16].

¹⁶Fuente: Tomada el 3 de Julio de 2014. Disponible en <http://www.arcos.inf.uc3m.es/infostr/lib/exe/fetch.php?media=introduccionpwm.pdf>

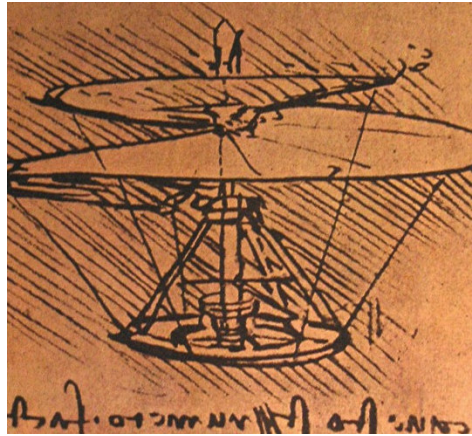


Figura 12: Máquina de Leonardo Da Vinci.¹⁷

La empresa Quanser® nace por el hecho de que se carecía de una máquina firme, precisa y robusta de control. Fue fundada en 1989 y ha venido avanzando rápidamente en la innovación y creación de sistemas como el helicóptero de 2 grados de libertad que se ve en la Figura 13 [17].



Figura 13: Helicóptero QUANSER de 2 grados de libertad.¹⁸

En el año 2000 S. M. Ahmad, S. J. Chipperfield y M. O. Tokhi de la Universidad de Sheffield, realizaron el modelo dinámico y control de TRMS “Twin Rotor Motor System” (Sistema MIMO de doble rotor) en vuelo estacionario, la representación dinámica del sistema fue adquirida por el comando IDENT de Simulink® con el modelo ARMAX de cuarto orden. El objetivo de la investigación se basaba en el desarrollo de métodos de control de las vibraciones de las masas, teniendo en cuenta que la carga de los rotores son la principal fuente de vibraciones del sistema [18].

¹⁷Fuente: Tomada el 23 de Julio de 2014. Disponible en <http://faircompanies.com/news/view/maquinas-volar-leonardo-impedimento-non-mi-piega/>

¹⁸Fuente: Tomada el 04 de Agosto de 2014. Disponible en http://www.quanser.com/products/2dof_helicopter

Garo Zarikian y Andrea Serrani en el 2005 realizaron el modelamiento del sistema por el modelo de ecuaciones de Euler-Lagrange para rechazo de perturbaciones. Desarrollaron una técnica, conocida comúnmente como "control anticipado de adaptación" el cual se basa en una acción de control de alimentación directa que anula la perturbación en su punto de lazo cerrado estabilizado. El modelo externo proporciona el rechazo de las perturbaciones en la entrada y los canales de los sensores [19].

En la Universidad Javeriana en el 2005 Andrés Caro, Francisco López y José Ortiz, realizaron el estudio físico de la dinámica de un helicóptero y obtuvieron un modelo matemático de ecuaciones de Lagrange y por medio del cual consiguieron un modelo en variables de estado, también desarrollaron un modelo computacional por Simulink®. Ejecutaron una metodología de controladores que utilizan algoritmos genéricos [2].

El Dr. Ben Cazzolato en el 2006 realizó un tutorial de un helicóptero de 2 grados de libertad que consta de dos hélices impulsadas por motores de corriente continua. Utilizó un joystick para el uso de los motores manualmente en lazo abierto con el fin de comparar el rendimiento de la planta entre un operador humano y controladores. Posteriormente el controlador estará en lazo cerrado haciendo que el operario mejore el rendimiento del control y sea más fácil de usar. Desarrolló un modelo simplificado y obtuvo un modelo de espacio de estado. Aplicó un controlador integral con el cual compara la acción humana [20].

En el 2008 unos estudiantes de la universidad de Sevilla en España desarrollaron bajo el marco del proyecto COMETAS financiado por la Comisión Europea en el Programa IST, diseñaron e implementaron un sistema de control distribuido de la coordinación de múltiples heterogéneos UAVs con un grado de autonomía diferente. Los métodos de control del helicóptero autónomo los dividieron en métodos de control basados en el conocimiento de aprendizaje y piloto, y los métodos de control basados en un modelo. Diferentes métodos para un helicóptero autónomo basado en el modelo de control se han presentado en la literatura, incluyendo control robusto lineal basado en modelos lineales de alto orden, el control de ganancia lineal y el control predictivo basado en modelo no lineal. Tuvieron en cuenta que en vuelo estacionario, el sistema no lineal puede ser linealizado y luego técnicas de control lineales multivariantes, tales como LQR y HM, se puede aplicar. Por otro lado, el control no lineal técnicas son más generales y abarcan las gamas más amplias de componentes de vuelo, pero requiere un conocimiento preciso sobre el sistema y son sensibles a modelar las disparidades [21].

En la universidad de Veracruz, México, en el 2009 Arely Ruiz Soto realizó la construcción y control de un helicóptero de 2 grados de libertad. Las barras son de aluminio, las hélices que utilizó fueron ventiladores para fuentes DC y utilizando como sensores potenciómetros como se ve en la Figura 14. Para el modelo matemático realizó el método de Euler-Lagrange y obtuvo un sistema no lineal, posteriormente diseñó un

controlador PID y adaptivo (basado en la teoría de modos deslizantes), en donde por medio de una interfaz en labview® podía visualizar el comportamiento de la planta con respecto al controlador. Finalmente, concluyeron que el controlador PID tuvo una respuesta en estado estacionario satisfactoria, pero era poco robusto ante dinámicas no modeladas y las perturbaciones del sistema. El controlador adaptable a diferencia del anterior presentó un tiempo de respuesta mucho menor sin sobre pico. La respuesta en estado estacionario fue mucho más veloz, también encontraron que la respuesta a las perturbaciones era aceptable [22].



Figura 14: Planta construida por Arely Ruiz.¹⁹

En el año 2009 Manuel Ospina en la universidad Nacional sede Medellín, realizó el control de una molienda, dado que es altamente complejo debido a la gran cantidad de variables que intervienen en el proceso tales como la dureza del mineral, tasa de alimento, tasas de flujo de agua y porcentaje de sólidos, esta gran variabilidad operacional hizo que dichos circuitos fueran difíciles de controlar, influenciado el alto consumo de energía y en el bajo desempeño de los circuitos. En control de procesos industriales es habitual encontrarse con sistemas con varias entradas y salidas, siendo el caso 2x2 el más tratado en la bibliografía, bien porque corresponde a procesos típicos reales, bien porque el proceso ha sido descompuesto en bloques de este tamaño. Aplicaron estrategias como, el control centralizado, bajo dos enfoques diferentes: el primero de ellos combina una red de desacoplo, formada por cuatro elementos $D_{ij}(s)$, con un controlador descentralizado, compuesto por dos elementos $k_i(s)$, y el segundo utiliza una red de controladores, formada por los cuatro elementos $k_{ij}(s)$, con filosofía puramente centralizada [12].

¹⁹Fuente: RUIZ SOTO, Arely. Construcción y control de una planta didáctica de dos grados de libertad. Veracruz: 2009.

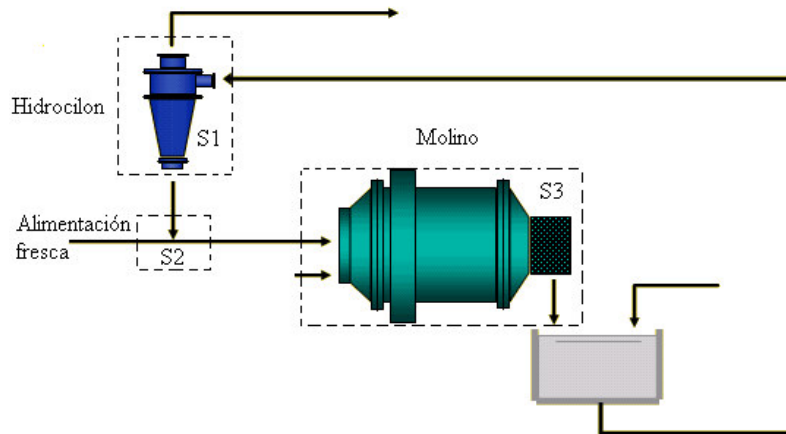


Figura 15: Circuito de Molienda-Clasificación.²⁰

Claudia Pérez, Wilfredis Medina, Leonardo Fermín, Juan Manuel Bogado, Rafael Torrealba y Gerardo Fernández en el 2010, recurren a la convergencia de estados entre el maestro y el esclavo, donde el robot maestro es manipulado por un usuario humano haciendo que las ventajas de un sistema robótico, sea preciso y seguro. Aplicaron controladores SISO, MIMO y control por estado de convergencias con una plataforma Quanser de 2 grados de libertad. Ellos realizaron un progreso en el control por estado de convergencias ya que solo se había aplicado a manipuladores y a plantas de 1 grado de libertad [23].

En el departamento de ingeniería mecánica de la universidad tecnológica de Bangkok realizaron el estudio del comportamiento de un pequeño helicóptero con ganancia Proporcional-Derivativo control del ángulo (PD) de elevación en el viento. Las actuaciones de control PD se observan en el viento con diferentes valores de ganancia de control P para recopilar datos para la construcción de compensador adecuado que los efectos del viento se consideran directamente. Utilizaron la prueba de túnel de viento con la técnica de dinámica que se llevó a cabo en lugar de pruebas de vuelo para simular el viento para atacar la condición con seguridad en caso de que el helicóptero se volviera inestable. Con base en los resultados experimentales, construyeron el control del ángulo de cabeceo PD con valor de ganancia de control P variable. En condiciones sin viento este método de control propuesto utilizaba un alto valor de ganancia de control P para reducir el error de estado estacionario. Y en condiciones de viento variables este método cambio para utilizar el valor más bajo de ganancia de control P para evitar la oscilación. Los experimentos de verificación mostraron respuestas de control favorables [24].

²⁰Fuente: OSPINA ALARCÓN, Manuel. Diseño de un sistema de control multivariable para un circuito de molienda en húmedo. Medellín: 2009.

Realizando un análisis a los antecedentes, no se encontró ninguno que realizara una construcción, un modelamiento, y un control usando varias técnicas para un helicóptero de dos grados de libertad, por lo que este trabajo busca realizar todas esas tareas al mismo tiempo. Proporcionando una fuerte contribución a lo que ya han venido trabajando. La construcción del helicóptero busca competir con el que desarrollo la compañía Quanser, proporcionando una buena calidad de funcionamiento y protección al usuario, para que futuros estudiantes profundicen sus estudios en técnicas de control multivariables por variables de estado.

4. DESARROLLO INGENIERIL

4.1. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA

A continuación se presenta el desarrollo electrónico que sustenta el helicóptero. Los sensores son de vital importancia, dado que darán la información del posicionamiento de cada ángulo y son los registros de entrada para realizar el control, los actuadores tienen la labor de incorporar el movimiento respectivo a los grados de libertad con la señal que proviene del controlador. Para completar el funcionamiento se tiene en cuenta el modo que se va a adquirir y registrar los datos para un rápido funcionamiento.

4.1.1. Sensores

Como es mencionado anteriormente el helicóptero cuenta con dos grados de libertad los cuales deben ser medidos constantemente por medio de un sensor, para obtener el valor de cada ángulo, dado que estos valores son las entradas para el sistema de control.

El sensor detecta la magnitud física y la transforma en una variable eléctrica, la cual se analiza y nos arroja todos los datos necesarios para saber el comportamiento del sistema. Para la selección del sensor se debe tener en cuenta su forma de acoplamiento (instalación), linealidad de la respuesta, entre otros aspectos.

Sensor	Características
Potenciometro lineal	· Respuesta lineal · Alto costo según el mercado actual en componentes electrónicos
Potenciometro	· Respuesta logaritmica · Bajo costo según el mercado actual en componentes electrónicos
Encoders	· Respuesta en frecuencia · Ubicación sentido de giro · Determina velocidad, longitud o posición

Cuadro 1: Características sensores.²¹

²¹Fuente: Diseñado por los autores

Teniendo en cuenta cada una de las particularidades de los sensores, se seleccionó el potenciómetro lineal dado que es un dispositivo capaz de medir la posición angular con una alta precisión y una respuesta lineal. El sensor se alimenta con 5 voltios en los terminales laterales para realizar un divisor de voltaje, porque con esta configuración reparte la tensión entre las dos resistencias que se generan en el potenciómetro a medida que se mueve la perilla.

Los movimientos de cada ángulo serán limitados, ya que cada uno tendrá un radio de giro útil, *pitch* tendrá un movimiento libre de 70° y *yaw* de 180° , por lo cual se eligió un potenciómetro de $1K\Omega$ y $50K\Omega$ respectivamente, esto con el fin de tener una mayor resolución en el registro de los datos.

4.1.2. Actuadores

Motor	Características
Motor DC	· Fácil control. · Alta velocidad (1000-5000rpm a 12V), bajo torque (10 a 20 mN) y viceversa · Inversión de marcha. · Devuelven energía a la línea actuando como generador.
Motor <i>Brushless</i>	· Rango de velocidad elevada al no tener limitación mecánica. (13000-20000rpm) · Menor ruido electrónico. · Mayor eficiencia por tener menor pérdida de energía al no tener escobillas y a su vez bajo mantenimiento. · Menor peso para la misma potencia. · Relación velocidad/par motor es casi una constante.

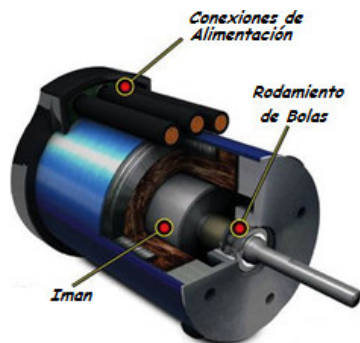
Cuadro 2: Características Motores.²²

Los motores brushless o sin escobillas están compuestos por una parte móvil que es el rotor, donde se encuentran los imanes permanentes, y una parte fija, denominada estator o carcasa, sobre la cual van dispuestos los bobinados de hilo conductor. En la Figura 16a se observa los bobinados, los imanes permanentes, el rotor y el estator.

²²Fuente: Diseñado por los autores

Para tener una respuesta rápida del sistema es necesario contar con un motor que cumpla esta fin, los *brushless* funcionan a altas velocidades dependiendo del Kv, la cual es la característica básica de este tipo de motores. Esta constante representa la cantidad de vueltas (RPM) que genera el motor por cada voltio aplicado al ESC (por sus siglas en ingles *Electronic Speed Controller*), es decir, que si se tiene por ejemplo un motor brushless de 3000kV, y se le aplica a sus bornes 10 voltios, la velocidad será de 30000rpm. Se debe tener en cuenta que a mayores valores del Kv, mayor velocidad, pero menores valores de par y viceversa.

El motor seleccionado fue un BM2815A que tiene un Kv de 1100 y requiere un ESC de 30A (Amperios) de salida. Los ESC son un circuito electrónico con la finalidad de variar la velocidad de motores eléctricos sin escobillas por medio de PWM, su dirección y posiblemente también actuar como un freno dinámico; generalmente aceptan una frecuencia nominal de 50Hz del PWM cuya señal de pulso varía de 1 ms a 2 ms. Se utilizan a menudo en los modelos eléctricos radio controlados, con la variedad más utilizada para motores brushless, esencialmente generada electrónicamente por una fuente trifásica de energía eléctrica de bajo voltaje y alto amperaje para el motor.



(a) Motor brushless.²³



(b) Control electrónico de velocidad.²⁴

Figura 16: Componentes motor ESC.

4.1.3. Adquisición de datos

Se utiliza la tarjeta de adquisición de datos de National Instruments PCI6014, la cual posee 8 entradas y salidas digitales, 2 timers y un trigger digital. Tiene como características de entrada, 16 entradas análogas, resolución de 16 bits con una frecuencia de muestreo de 200 *kS/s*, voltaje de ± 0.05 a $\pm 10V$. En cuanto a los puertos análogos de entrada usados, se hizo uso de dos, estas tiene una tasa de muestreo de 200.000 datos a 16 bits por segundo cada uno o una tasa mayor de 3.2 *Mbaudios*. Se usan 2 salidas

²³Fuente: Tomada y editada el 10 de Septiembre de 2014. Disponible en <http://www.cochesrc.com/attachments/snap504.jp-f11644>

²⁴Fuente: Tomada el 10 de Septiembre de 2014. Disponible en http://ecx.images-amazon.com/images/I/41FW6UcZpL._SY300_.jpg

digitales en frecuencia con una resolución de 16 bits, una frecuencia de muestreo de 10 kS/s , voltaje de $\pm 10V$, estas son las características usadas para la lectura y envío de datos en la comunicación PCI-6014 / Matlab®, adicional a esto los motores funcionan a una frecuencia de 250 a 300 Hz, y se toman datos cada 1 ms .

En la Figura 17 se muestra como la tarjeta realiza la comunicación entre el módulo de control y la herramienta computacional Matlab-Simulink®, por medio del paquete de *real time target* “*Communication and acquisition data in real time*”. Se usan lectores análogos para la adquisición de datos de los sensores y los puertos de frecuencias para las salidas, las cuales varían el PWM que necesitan los motores para aumentar o disminuir sus velocidades. Como se puede observar se usa un módulo de control para realizar un precontrol en lazo abierto para buscar la estabilidad del helicóptero, de igual forma se muestran los conectores de retroalimentación y de referencia. De esta forma se podrá aplicar las tres técnicas de control planteadas.

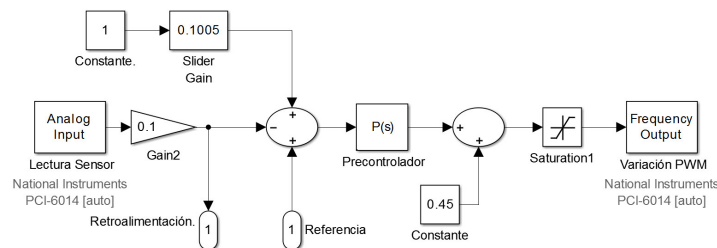


Figura 17: Diagrama de conexión en Simulink.²⁵

Teniendo en cuenta que el helicóptero es de base fija, se utiliza una caja como módulo de componentes electrónicos en donde se ubica los ESC, una fuente conmutada industrial de 12V a 10A, un ventilador de 12V para disipación del calor y la conexión al puerto PCI que comunica a la tarjeta. En la parte frontal luce 1 interruptor y 8 borneras las cuales se ilustran en la Figura 18 donde cada conexión es:

- **Output *Yaw***: Salida análoga del sensor *yaw*.
- **Output *Pitch***: Salida análoga del sensor *pitch*.
- **Input *Yaw***: Entrada de alimentación ESC motor *yaw*.
- **Input *Pitch***: Entrada de alimentación ESC motor *Pitch*.
- **5V**: Entrada de 5 voltios.
- **12V**: Salida auxiliar de 12 voltios.

²⁵Fuente: Diseñado por los autores



Figura 18: Módulo de componentes electrónicos.²⁶

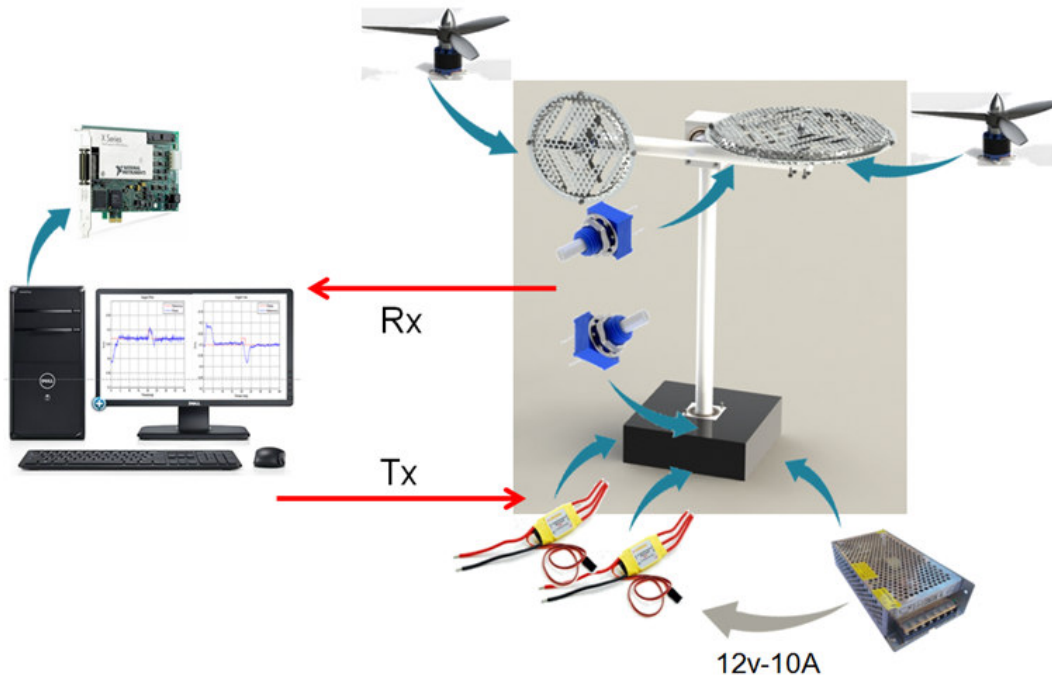


Figura 19: Esquema de conexiones.²⁷

La Figura 19 muestra cómo está la conexión de los componentes utilizados en el helicóptero DGL. El computador tiene conectada internamente una tarjeta PCI 6014 de National Instruments®, la cual está ligada a la herramienta computacional Matlab-Simulink® por medio del *Real Time Target*, esto permite generar una comunicación entre Matlab® - Modulo de control por medio de dos entradas analógicas que conectan los dos sensores (potenciómetros lineales) utilizados. Los dos motores sin escobillas están conectados a dos controladores de velocidad y estos a su vez a una fuente de alimentación de 12 voltios a 10 amperios y sus salidas digitales están conectadas a dos puertos de frecuencia CTR0 y CTR1 de la tarjeta PCI 6014, proporcionando así a los controles con las dos entradas y dos salidas del sistema *MIMO*.

²⁶Fuente: Diseñado por los autores

²⁷Fuente: Diseñado por los autores

4.2. DISEÑO MECÁNICO

A continuación se presenta el desarrollo mecánico con sus respectivos materiales y cálculos. Se elige el material de acuerdo a las fuerzas ejercidos sobre el helicóptero y así soportar las cargas máximas en los puntos que se ejercen esfuerzos. Ya que es un sistema dinámico y tiene un constante funcionamiento los rodamientos con mejor funcionalidad y de mayor vida útil.

4.2.1. Esfuerzo en la viga

La viga soporta los motores y demás materiales en los extremos, los mayores esfuerzos se produjeron cuando se encontraba totalmente horizontal. Para obtener las fuerzas sobre la viga se tuvieron en cuenta las mayores cargas y diferentes elementos; por lo tanto, sumando el peso de los cables, tornillos, tuercas, protectores, entre otros, se obtuvo:

Para el extremo A

$$m_1 = 1.6Kg \quad (4.1)$$

Para el extremo C

$$m_2 = 1.4Kg \quad (4.2)$$

Para obtener la fuerza a partir del peso se realizó la siguiente conversión

$$1Kg = 9.8N \quad (4.3)$$

$$\frac{9.8N \cdot 1.6Kg}{1Kg} = 15.68N$$

$$\frac{9.8N \cdot 1.4Kg}{1Kg} = 13.72N$$

Teniendo las fuerzas, se procedió a realizar los cálculos de los esfuerzos generados

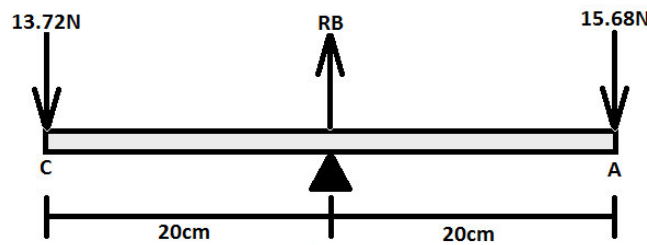


Figura 20: Esfuerzos en la viga.²⁸

Se realizó la sumatoria de fuerzas para obtener R_B

$$\sum F_{RB} = 0$$

²⁸Fuente: Diseñado por los autores

$$-15.68N - 13.72N + R_B = 0$$

Despejando:

$$R_B = 29.4N$$

Teniendo el valor de R_B se realizó el diagrama de fuerzas y momentos

$$M = 13.72 \cdot N0.2m = 2.74Nm \quad (4.4)$$

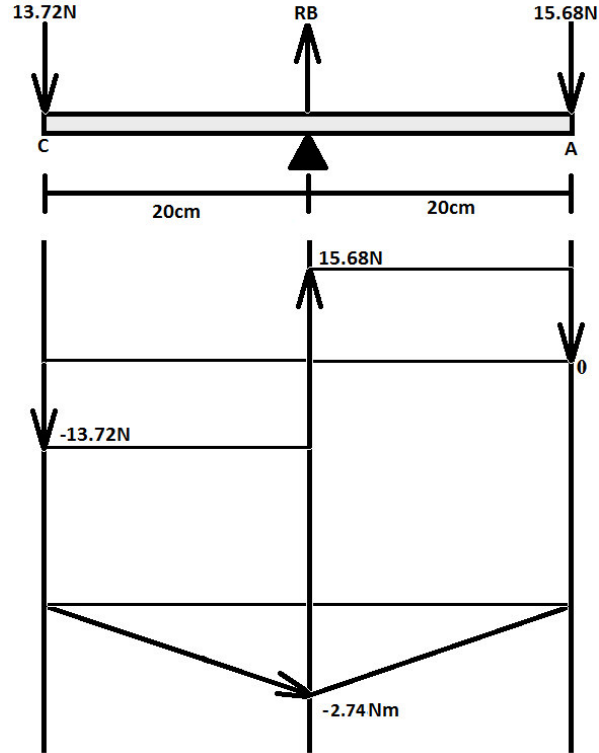


Figura 21: Esfuerzos y momentos en la viga.²⁹

Cuando se comprobó el diagrama se obtuvieron las fuerzas aplicadas y los momentos que actúan sobre la viga.

Se tuvo en cuenta la resistencia a la fluencia (S_y) del polipropileno que es de $300 \frac{Kg}{cm^2}$ [26], el cual sirvió para evaluar si el polipropileno resistirá las fuerzas aplicadas mencionadas anteriormente. Ahora bien, se realiza la siguiente conversión para que la unidad sea en Pascales

$$1 \frac{Kg}{cm^2} = 98100Pa$$

$$S_y = \frac{300 \frac{Kg}{cm^2} 98100Pa}{1 \frac{Kg}{cm^2}}$$

²⁹Fuente: Diseñado por los autores

$$S_y = 29.93 MPa \quad (4.5)$$

Teniendo el S_y del polipropileno se prosigue a obtener el diámetro mínimo de la viga que soportará las fuerzas que se encuentran en los extremos.

Como se observa en la Figura 20 el extremo A es donde se aplica más fuerza, por lo cual se procedió a hallar el diámetro mínimo de este extremo [27].

$$D_{ex} = \sqrt{\frac{32Vn}{3\pi S_y}}$$

Donde:

V (Fuerza aplicada)=15.68N

n (Factor de seguridad)=2

$$D_{ex} = \sqrt{\frac{32(15.68)(2)}{3\pi(29.93 \cdot 10^6)}} = 1.88 \cdot 10^{-3} mm \quad (4.6)$$

El diámetro mínimo de los extremos debe ser el obtenido en la ecuación (4.6). Teniendo este valor se calculó el diámetro del centro, donde M es el valor obtenido en la ecuación (4.4) y $T = 0$.

$$D_{centro} = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi S_y} \sqrt{M^2 + T^2}}$$

$$D_{centro} = \sqrt[3]{\frac{32(2)}{\pi(29.93 \cdot 10^6)}} 2.74 = 12.3 \cdot 10^{-3} mm \quad (4.7)$$

El diámetro mínimo del centro debe ser el obtenido en la ecuación (4.7).

Obtenidos los diámetros mínimos, se seleccionó un radio de 16.5 mm para la viga, por cuestiones de montaje de los motores y facilidad de fabricación.

4.2.2. Esfuerzos en el soporte de la viga

Una vez obtenido el diámetro se prosiguió a hallar los esfuerzos en el soporte de la viga teniendo en cuenta el punto de anclaje.

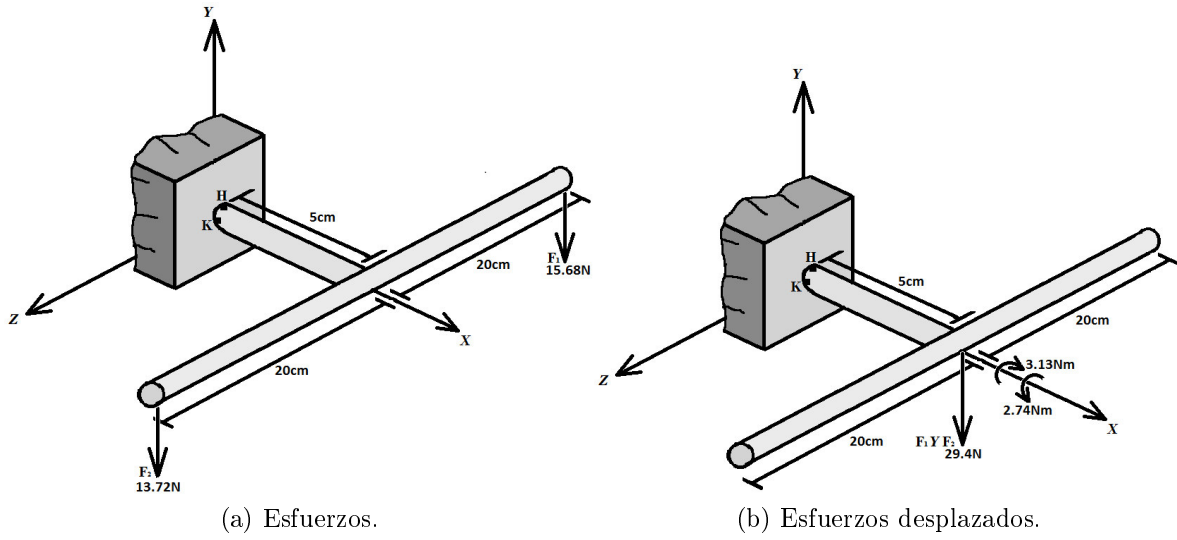


Figura 22: Esfuerzos sobre la viga.³⁰

Se desplazan las fueras hacia el centro de la viga generando 2 momentos, de lo cual su resta genera un momento despreciable sobre la viga.

Una vez desplazadas las fuerzas se halló el área del cilindro desde el punto de apoyo hasta donde se ejerce la fuerza.

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} (0.033)^2 = 25.9 \cdot 10^{-3} m^2$$

Luego, se analizó el punto H que se observa en la Figura 22, el cual tiene un flector por tracción.

$$\sigma = \frac{4M}{\pi c^3}$$

c (Radio del cilindro) = $0.0165m$

$$\sigma = \frac{4(2.74N \cdot 0.05m)}{\pi(0.0165m)^3} = 38.83 KPa$$

Se examinó el punto K, el cual tiene un cortante.

$$\delta = \frac{2V}{A} = 2.27 KPa$$

Por la fórmula de Von Mises se demuestra la resistencia del polipropileno para este trabajo.

³⁰Fuente: Diseñado por los autores

En H

$$n = \frac{S_y}{\sigma'}$$
$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

σ_1 Máximo, obtenido anteriormente

σ_3 Mínimo, $0MPa$

$$\sigma' = 38.83KPa$$

$$S_y = 2(38.83) = 77.66KPa \quad (4.8)$$

En K

$$n = \frac{0.57S_y}{\delta}$$

$$S_y = \frac{2(2.27)}{0.57} = 7.96KPa \quad (4.9)$$

Comparando las ecuaciones (4.8) y (4.9) con (4.5) y el Cuadro 13 se observa que el polipropileno resistirá los esfuerzos a los que estará sometido el soporte de la viga y es el mejor material entre los tres comparados. Por lo tanto se logra concluir que es un buen material para la planta dada su alta resistencia, bajo costo y durabilidad.

4.2.3. Selección del material

Material	Características	Resistencia a la fluencia (s_y)	Peso específico
Acero AISI 1040	· Resistente · Duradero · Pesado · Alto costo	$350MPa$	$7.850gr/cm^3$
Aluminio (Aleación)	· Resistente · Frágil · Liviano · Bajo costo	$97MPa$	$2.7gr/cm^3$
Polipropileno PP	· Resistente · Duradero · Liviano · Bajo costo · Facilidad de mecanizado	$30MPa$	$0.91gr/cm^3$

Cuadro 3: Comparación materiales para viga.³¹

³¹Fuente: Diseñado por los autores

4.2.4. Selección de los rodamientos

Rodamiento	Características
Rígido de bolas	· Absorber cargas puramente radiales. · Son no desmontables. · Adecuados para altas velocidades. · Poco mantenimiento. · Sencillos de diseñar. · Bajo costo.
Rodillos cilíndricos	· Absorber cargas puramente radiales más elevadas. · Son desmontables. · Alto costo.
Agujas	· Tienen gran capacidad de carga. · Son especialmente útiles en montajes donde se dispone de un espacio radial limitado. · Alto costo.

Cuadro 4: Comparación rodamientos.³²

Se seleccionó en rodamientos rígidos de bolas por tener mayores características a su favor para este tipo de trabajo, donde prima el bajo costo y el poco mantenimiento.

³²Fuente: Diseñado por los autores

4.2.5. Vida útil rodamientos

Se tienen 2 rodamientos, uno para la elevación y otro para la orientación. Se usaron los rodamientos 6006ZC3 de bolas. Para hallar el número de ciclos útiles se utilizó la siguiente ecuación:

$$L_2 = L_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^k \quad (4.10)$$

Donde:

L_1 = Numero de ciclos de prueba (mayoría de veces 10^6).

L_2 = Ciclos útiles.

P_1 = Carga nominal.

P_2 = Carga de diseño.

k = Tipo de rodamiento.

Ya que el rodamiento es de bolas, se tiene $k = 3$ y P_1 es proporcionado por el fabricante [28]. A continuación, se procede a encontrar la carga L_2 que soportará cada uno de los rodamientos. Teniendo en cuenta m_1 y m_2 de las ecuaciones (4.1), (4.2) (respectivamente) se obtuvo:

Rodamiento de Pitch.

$$\begin{aligned} &viga + m_1 + m_2 \\ &0.292 + 1.6 + 1.4 = 3.292Kg \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.3) se realizó la misma conversión.

$$P_2 = 32.2616N \text{ Para rodamiento superior}$$

Reemplazando en la ecuación (4.10)

$$L_2 = 10^6 \left(\frac{29.1N}{32.2616N} \right)^3$$

Entonces se obtuvo:

$$L_2 = 0.7338 \cdot 10^6$$

Con un funcionamiento de $w = 1.5rpm$, se consiguió la vida útil del rodamiento.

$$\begin{aligned} t &= \frac{L_2}{w} \\ t &= \frac{0.7338 \cdot 10^6 \text{ ciclos}}{1.5 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}}} \cdot \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ h}} \\ t &= 339.7 \text{ dias} \end{aligned}$$

Este rodamiento tiene una vida útil de 339.7 días utilizándolo de forma continua.

Rodamiento de Yaw.

$$\begin{aligned} & \text{Soporte viga} + \text{cilindro} + \text{viga} + m_1 + m_2 \\ & 0.524 + 0.491 + 0.292 + 1.6 + 1.4 = 4.307Kg \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.3) se realizó la misma conversión.

$$P_2 = 42.2086N \text{ Para rodamiento inferior}$$

$$L_2 = 10^6 \left(\frac{29.1N}{42.2086N} \right)^3$$

Entonces:

$$L_2 = 0.3277 \cdot 10^6$$

Con un funcionamiento de $w = 2rpm$, se consiguió la vida útil del rodamiento.

$$t = \frac{L_2}{w}$$

$$t = \frac{0.3277 \cdot 10^6 \text{ciclos}}{2 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}}} \cdot \frac{1 \text{dia}}{24 \text{h}}$$

$$t = 113.8 \text{días}$$

Este rodamiento tiene una vida útil de 113.8 días utilizándolo de forma continua.

4.2.6. Características de los materiales

MATERIAL	IMAGEN	CARACTERÍSTICAS
Polipropileno		· Modulo de elasticidad $1.2GPa$. · Resistencia fluencia $39.93MPa$. · Peso específico $0.91gr/cm^3$. · Fácil mecanizado.
Rodamiento de bolas		· Operan a altas velocidades. · Resistente en el funcionamiento. · Soporta mayores cargas. · Exige poco mantenimiento. · Mayor vida útil.
Helices		· Generan gran empuje. · Soportan altas velocidades. · Son livianas. · Tienen bajo costo.
Protectores		· Protección para el usuario. · Protección para la hélice. · Alta durabilidad. · Bajo peso.

Cuadro 5: Materiales seleccionados.³³

³³Fuente: Diseñado por los autores

4.2.7. Teorema de ejes paralelos

Posteriormente se necesitará de la inercia del sistema, por lo cual se realizan los siguientes cálculos

$$I_C = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 \lambda dx$$

Se realizó la integral

$$I_C = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{d^3}{8} + \frac{d^3}{8} \right) = \left(\frac{d^3 \lambda}{12} \right)$$
$$\lambda = \frac{m}{d}$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, se obtuvo

$$I_C = \left(\frac{d^2 m_v}{12} \right)$$

Ahora se procede a calcular las inercias con respecto a los extremos

$$I_A = I_C + d^2 m_1$$
$$I_A = \left(\frac{d^2 m_v + 12d^2 m_1}{12} \right)$$
$$I_B = I_C + d^2 m_2$$
$$I_B = \left(\frac{d^2 m_v + 12d^2 m_2}{12} \right)$$

Sumando las inercias se tiene:

$$I_T = I_A + I_B$$
$$I_T = \left(\frac{d^2 m_v + 12d^2 m_1}{12} \right) + \left(\frac{d^2 m_v + 12d^2 m_2}{12} \right)$$
$$I_T = \left(\frac{2d^2 m_v + 12d^2 (m_1 + m_2)}{12} \right)$$

Donde:

($d = 0.2m$) Distancia desde el centro a los extremos de masa, como se ve en la Figura 35.

($m_v = 0.6Kg$) masa de la viga.

m_1 y m_2 corresponden a las ecuaciones (4.1) y (4.2). Entonces

$$I_T = 128.27 \cdot 10^{-3} Kg \cdot m^2 \quad (4.11)$$

El cual corresponde al valor total de la inercia.

4.3. CONSTRUCCIÓN

El helicóptero de dos grados de libertad fue diseñado y construido en forma de T, en donde la viga principal gira con respecto a la vertical por medio de un rodamiento de balines, además, está conectado a un potenciómetro lineal que actúa como sensor, el cual permitirá leer el ángulo (Pitch) en que se encuentra la viga y así poder realizar el respectivo control. La viga conectada perpendicularmente gira con respecto a su eje de conexión también por medio de un rodamiento y con un segundo sensor (potenciómetro lineal) realizando la misma acción, se lee el ángulo Yaw y así completar los dos grados de libertad de sistema.

A continuación se mostrará el procedimiento que se realizó para la construcción del helicóptero de dos grados de libertad detalladamente:

1. Se diseñó el helicóptero mecánicamente, el cual permitió escoger el material con el que se construyó. Realizando una comparación de los materiales que podían usarse, se escogió el polipropileno, un material resistente, liviano, duradero y con alta facilidad de mecanizado.
2. El polipropileno se maquinó en el centro de mecanizado *Computer Numerical Control* ("CNC") de la Universidad de San Buenaventura.



Figura 23: Centro de mecanizado CNC.³⁴

3. Se utilizaron dos rodamientos de alta durabilidad, los cuales se acoplaron para que permitieran la movilidad de los dos grados de libertad sin ningún inconveniente, además se ensamblaron los rodamientos al polipropileno en la máquina de compresión de la Universidad de San Buenaventura.

³⁴Fuente: Imagen tomada y Diseñado por los autores

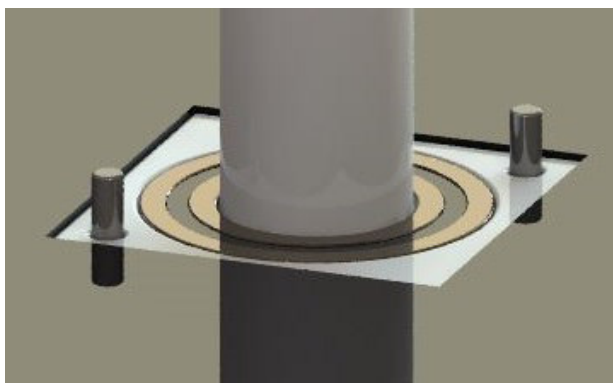
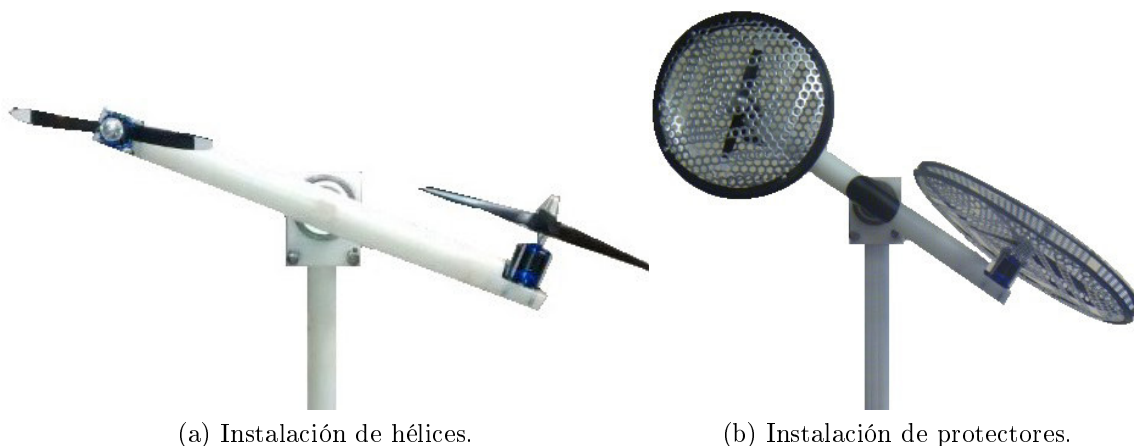


Figura 24: Rodamiento acoplado.³⁵

4. Se acoplaron los dos motores sin escobillas (Brushless) en cada uno de los extremos de la viga, también se adaptaron las hélices y los protectores, los cuales permiten protección como el paso del aire para generar empuje.



(a) Instalación de hélices.

(b) Instalación de protectores.

Figura 25: Acoplamiento superior.³⁶

5. Se construyó una caja como se ve en la Figura 18 en donde están todas las conexiones que le permiten al helicóptero realizar la comunicación con la tarjeta PCI 6014 de National Instruments®, además tiene conexiones que le permitirán realizar la comunicaciones con cualquier tarjeta electrónica, ya sea Microship PIC, Arduino, Texas Instruments, entre otras. Interiormente cuenta con una fuente switchada industrial de 12 voltios a 10 amperios la cual está dentro del módulo con los controladores electrónicos de velocidad (ESC) de 40 amperios. El módulo de control tiene dos salidas de voltaje de 12 y 5v para usarla como fuente de alimentación si se necesita.

³⁵Fuente: Diseñado por los autores

³⁶Fuente: Imagen tomada y Diseñada por los autores

El helicoptero 100 % ensamblado es el que se muestra a continuación:



Figura 26: Módulo de Control HDGL.³⁷

³⁷Fuente: Imagen tomada y Diseñada por los autores

4.4. APROXIMACIÓN LINEAL DEL EMPUJE DE LAS HÉLICES

Se realizaron pruebas de empuje de cada hélice para obtener una gráfica de la fuerza con respecto a la velocidad. Las mediciones se efectuaron utilizando una conexión de la planta a la tarjeta PCI 6014 de National Instruments NI ELVIS® en la cual se realizaron las variaciones del ancho de pulso (duty) que requieren los controladores electrónicos de velocidad ESC para alimentar a los motores. En la Figura 27 se observa la medición de la hélice de cola o posterior, además en la Figura 28 se observa un dinamómetro el cual registró las fuerzas de empuje (N), también un tacómetro (RPM) con el que se midió la velocidad de rotación de las hélices.



Figura 27: Prueba de empuje.³⁸



(a) Dinamómetro.



(b) Tacómetro.

Figura 28: Sensores.³⁹

³⁸Fuente: Imagen tomada y editada por los autores

³⁹Fuente: Imagen tomada y editada por los autores

Hélice de Pitch. Para la elevación se tiene en cuenta que se realizó el empuje inicializando únicamente el motor principal, realizando las mediciones de θ_1 en el plano vertical, y se hace una medición adicional de la fuerza transversal que genera la elevación del motor de Pitch del helicóptero y así obtener las siguientes tablas.

DUTY	0.22	0.26	0.28	0.32	0.36	0.4	0.42	0.46	0.48	0.5
VELOCIDAD (RPM)	3530	3900	4030	4329	4650	4875	4975	5263	5352	5480
FUERZA (N)	0.44	0.58	0.66	0.9	1.13	1.3	1.4	1.6	1.84	1.93

Cuadro 6: Empuje vertical.⁴⁰

DUTY	0.16	0.2	0.24	0.28	0.3	0.34	0.36
VELOCIDAD (RPM)	2778	3360	3815	4205	4382	4730	4953
FUERZA (N)	0.34	0.46	0.63	0.78	0.84	1	1.08

Cuadro 7: Fuerza transversal.⁴¹

A continuación, se ve gráficamente el comportamiento de la hélice.

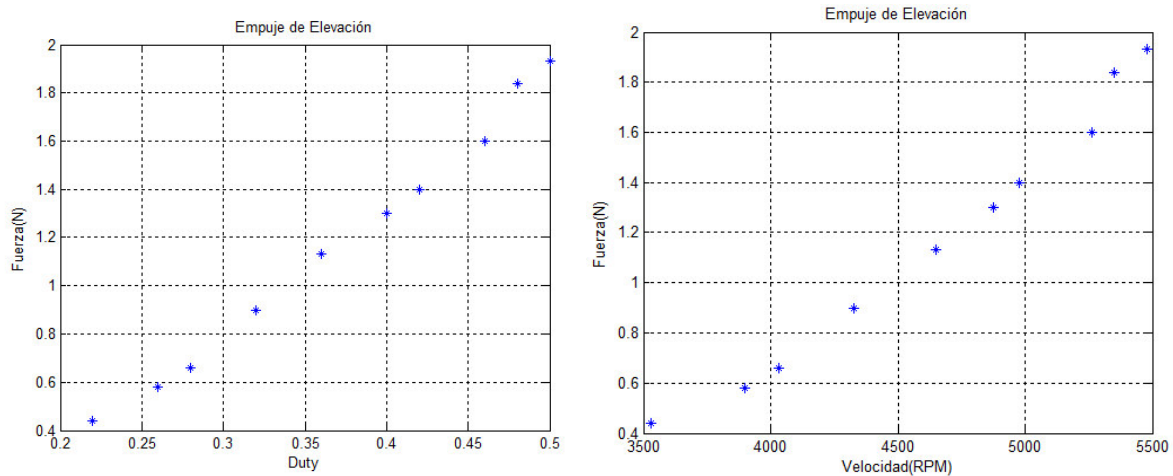


Figura 29: Empuje Vertical.⁴²

⁴⁰Fuente: Diseñado por los autores

⁴¹Fuente: Diseñado por los autores

⁴²Fuente: Diseñadas y editadas por los autores

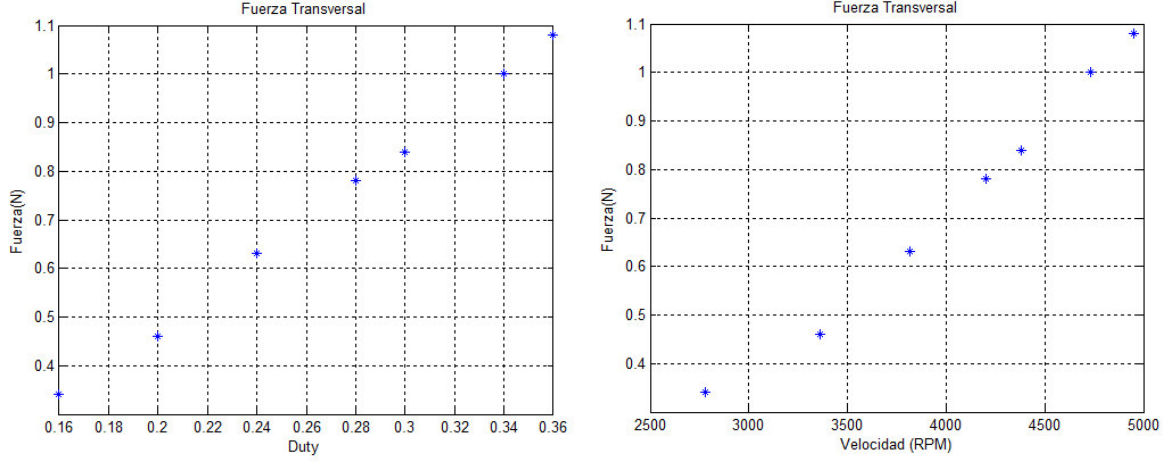


Figura 30: Fuerza Transversal.⁴³

Se puede observar en las Figuras 29 y 30 el comportamiento es aproximadamente lineal, por lo cual se comprobó realizando una linealización de Fuerza vs Velocidad. Se realizó la linealización con la ecuación de la recta

$$y = mx + b \quad (4.12)$$

Donde:

$$\begin{aligned} m &= \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \\ b &= \frac{\sum y - m\sum x}{n} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} VELOCIDAD(RPM) &= x \\ FUERZA(N) &= y \end{aligned}$$

⁴³Fuente: Diseñadas y editadas por los autores

n	x	y	x^2	xy
1	3530	0.44	12460900	1553,2
2	3900	0.58	15210000	2262
3	4030	0.66	16240900	2659,8
4	4329	0.9	18740241	3896,1
5	4650	1.13	21622500	5254,5
6	4875	1.3	23765625	6337,5
7	4975	1.4	24750625	6965
8	5263	1.6	27699169	8420,8
9	5352	1.84	28643904	9847,68
10	5480	1.93	30030400	10576,4
Σ	46384	12	219164264	57773

Cuadro 8: Empuje vertical linealización.⁴⁴

n	x	y	x^2	xy
1	2778	0,34	7717284	944,52
2	3360	0,46	11289600	1545,6
3	3815	0,63	14554225	2403,45
4	4205	0,78	17682025	3279,9
5	4382	0,84	19201924	3680,88
6	4730	1	22372900	4730
7	4953	1,08	24532209	5349,24
Σ	28223	5	117350167	21934

Cuadro 9: Fuerza transversal linealización.⁴⁵

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.12) y (4.13) se obtuvieron los siguientes datos

VELOCIDAD (RPM)	3530	3900	4030	4329	4650	4875	4975	5263	5352	5480
FUERZA (N) Práctica	0.44	0.58	0.66	0.9	1.13	1.3	1.4	1.6	1.84	1.93
FUERZA (N) Linealización	0.31	0.60	0.70	0.94	1.19	1.36	1.44	1.67	1.73	1.83

Cuadro 10: Empuje vertical.⁴⁶

⁴⁴Fuente: Diseñado por los autores

⁴⁵Fuente: Diseñado por los autores

⁴⁶Fuente: Diseñado por los autores

VELOCIDAD (RPM)	2778	3360	3815	4205	4382	4730	4953
FUERZA (N) Práctica	0.34	0.46	0.63	0.78	0.84	1	1.08
FUERZA (N) Linealización	0.29	0.50	0.66	0.79	0.86	0.98	1.06

Cuadro 11: Fuerza transversal.⁴⁷

En las Figuras 31 y 32 se observa la linealidad que tiene el empuje y la fuerza de coriolis de la hélice de Pitch.

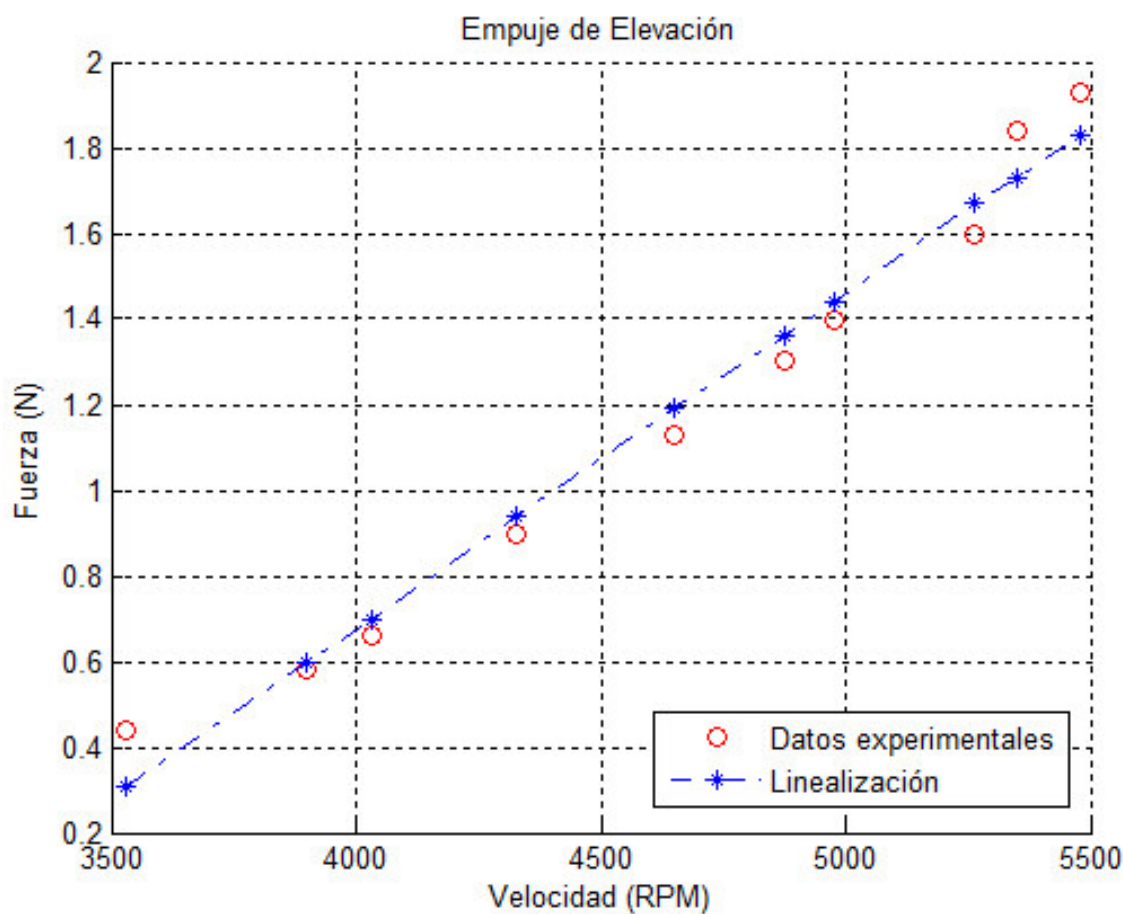


Figura 31: Empuje Vertical Linealización.⁴⁸

⁴⁷Fuente: Diseñado por los autores

⁴⁸Fuente: Diseñado y editado por los autores

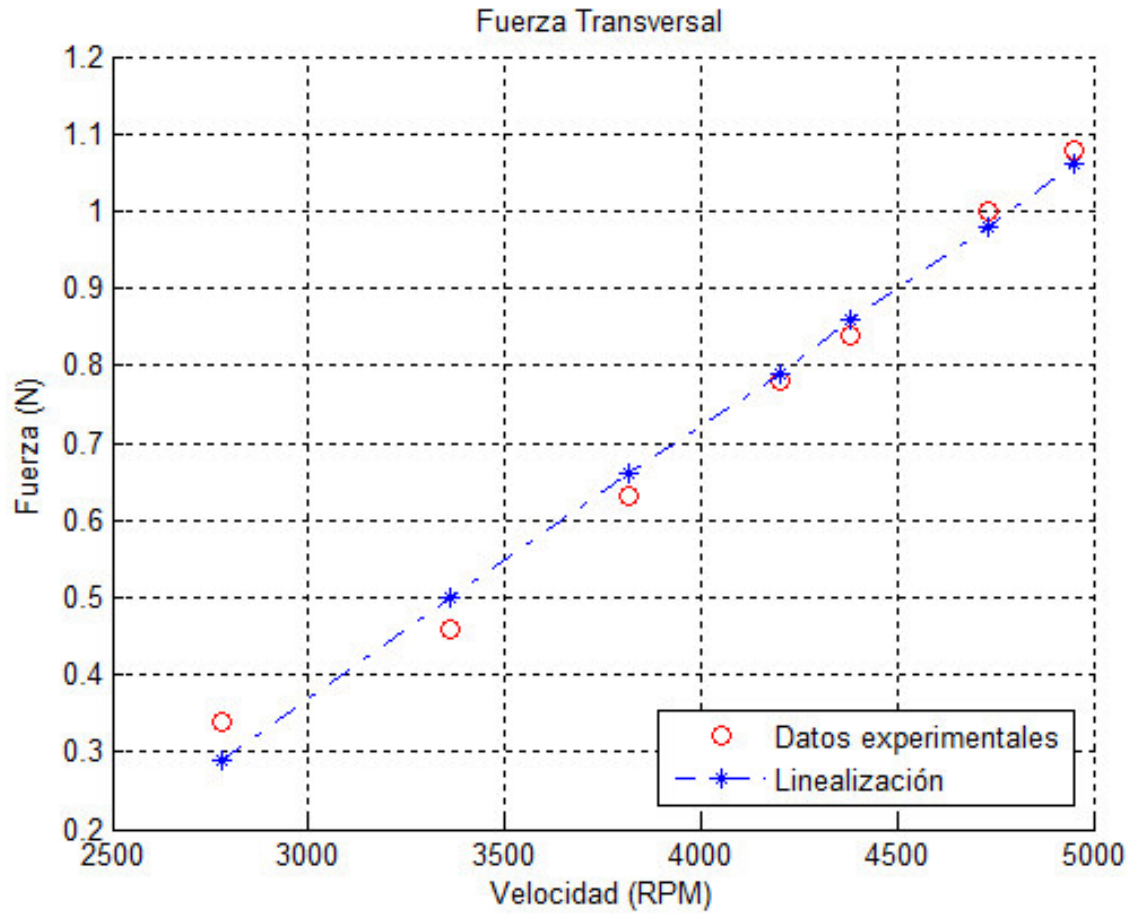


Figura 32: Fuerza Transversal Linealización.⁴⁹

Hélice de Yaw. Para la medición de la fuerza en Yaw se inicializó únicamente el motor de cola, lo que permitió visualizar y medir la variación de θ_2 , el cual realiza su variación en el plano horizontal, por lo anterior se obtuvieron los siguientes datos relacionados en la tabla 12.

DUTY	0.26	0.28	0.3	0.32	0.36	0.38	0.42	0.44
VELOCIDAD (RPM)	6342	6866	7453	7811	8565	8759	9294	9506
FUERZA (N)	0.07	0.12	0.16	0.19	0.25	0.34	0.36	0.39

Cuadro 12: Empuje horizontal.⁵⁰

⁴⁹Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁵⁰Fuente: Diseñado por los autores

A continuación, se ve gráficamente el comportamiento de la hélice.

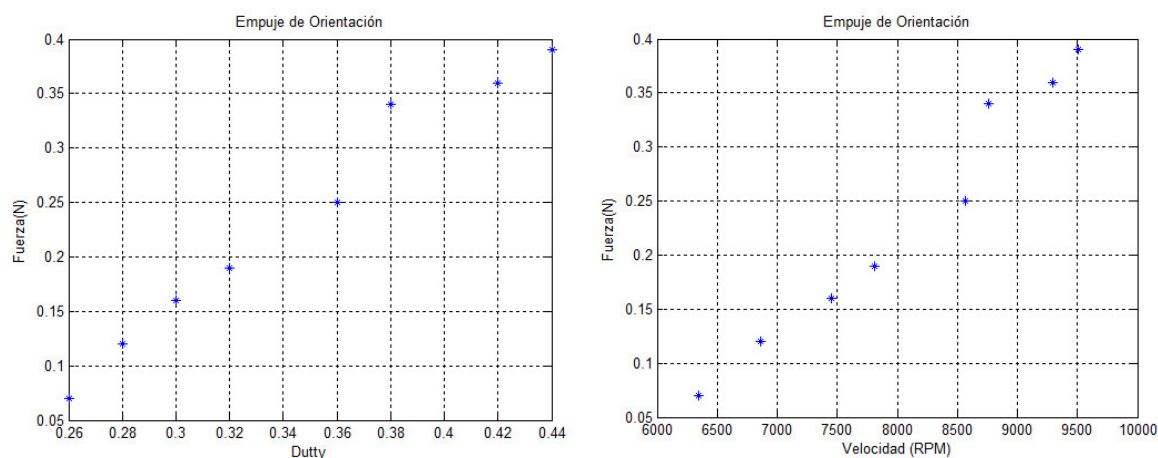


Figura 33: Empuje horizontal.⁵¹

Se puede observar en la Figura 33 que el comportamiento es aproximadamente lineal, por lo cual se comprobó realizando una linealización de Fuerza vs Velocidad, como se realizó anteriormente.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.12) y (4.13) se obtuvieron los siguientes datos

n	x	y	x^2	xy
1	6342	0,07	40220964	443,94
2	6866	0,12	47141956	823,92
3	7453	0,16	55547209	1192,48
4	7811	0,19	61011721	1484,09
5	8565	0,25	73359225	2141,25
6	8759	0,34	76720081	2978,06
7	9294	0,36	86378436	3345,84
8	9506	0,39	90364036	3707,34
Σ	64596	2	530743628	16117

Cuadro 13: Empuje vertical linealización.⁵²

⁵¹Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁵²Fuente: Diseñado por los autores

En la Figura 34 se observa la linealidad que tiene el empuje de la hélice de Yaw.

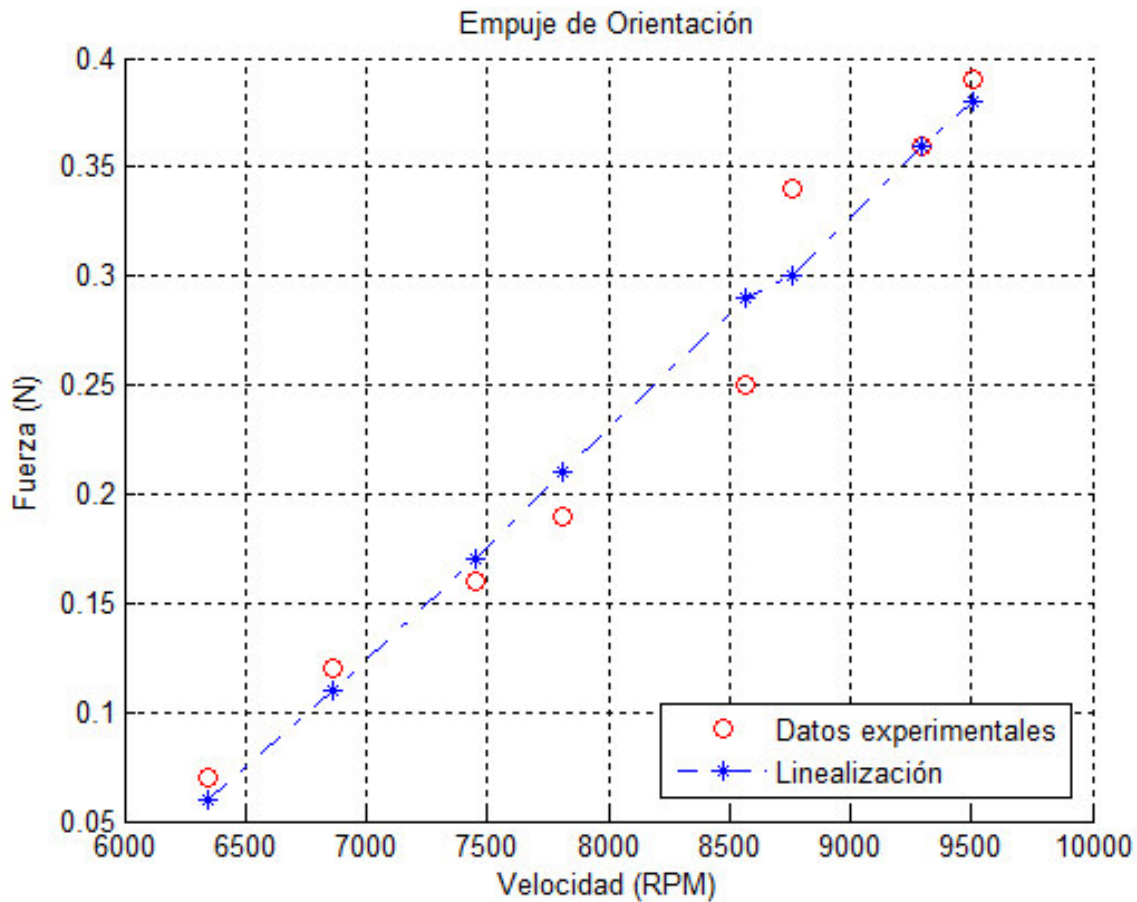


Figura 34: Empuje Vertical Linealización.⁵³

Con las Figuras 31, 32 y 34 se puede observar el comportamiento lineal de la fuerza con respecto a la velocidad y la fuerza con respecto al *dutty*, lo cual conlleva a concluir que el sistema motor hélice no va aportar una mayor no linealidad al sistema en general, permitiendo realizar una linealización con mayor facilidad. Hay que resaltar que dadas estas respuestas no se entra a realizar un análisis de no linealidad de mayor complejidad.

⁵³Fuente: Diseñado y editado por los autores

4.5. MODELO MATEMÁTICO GENERAL UTILIZANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER-LAGRANGE

Para obtener las ecuaciones de movimiento del helicóptero que cuenta con dos grados de libertad, se utilizan las ecuaciones que describen la dinámica del sistema. En la Figura 35 se observa las fuerzas que se ejercen sobre el sistema, las cuales permitirán visualizar con mayor facilidad la direcciones hacia donde tendra movilidad el helicóptero. m_1 es el total de la masa que se encuentra concentrada en la parte delantera, donde se encuentra la hélice de elevación y m_2 es el total de la masa que se encuentra en la parte posterior donde está ubicado el rotor antipar. d_1 y d_2 son las distancias que se encuentran entre el apoyo y la concentración de masas respectivamente.

F_1 y F_2 son las fuerzas que se deben a la gravedad actuando sobre cada punto de masa, F_6 es la fuerza transversal o de coriolis que genera el rotor de cola y F_3 es la fuerza de empuje que genera la hélice de elevación.

F_4 es la fuerza que genera el rotor de orientación y F_5 es la fuerza transversal o de coriolis que genera el rotor principal. [2].

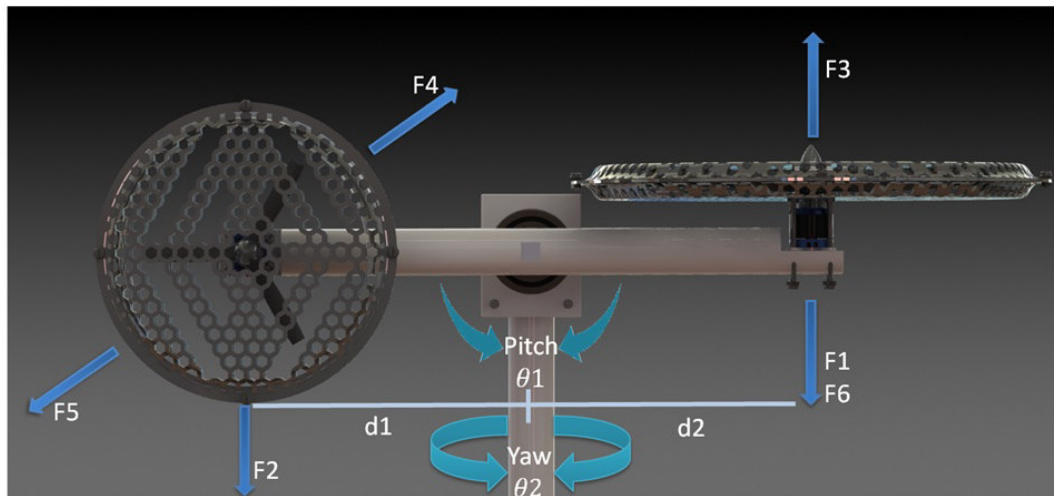


Figura 35: Fuerzas que actúan en el sistema.⁵⁴

⁵⁴Fuente: Diseñado y editado por los autores

En base a las Figuras 36 y 37 se procede a realizar la descomposición vectorial en X , Y y Z . Se debe de tener en cuenta el sentido positivo en todos los ángulos.

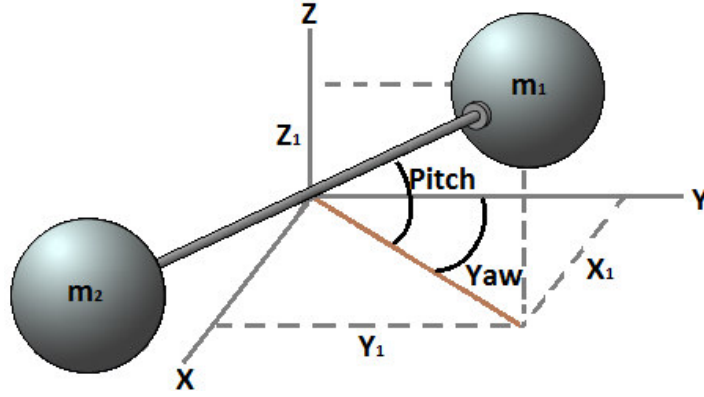


Figura 36: Coordenadas generalizadas en m_1 ⁵⁵

Inicialmente se realizará la descomposición vectorial con respecto a m_1 para así obtener X_1 , Y_1 y Z_1 .

Donde:

$$Pitch = \theta_1 \quad (4.14)$$

$$Yaw = \theta_2 \quad (4.15)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} X_1 &= d_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ Y_1 &= d_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ Z_1 &= d_1 \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora derivando cada una de las posiciones se obtienen las velocidades. Luego se suman las velocidades al cuadrado para obtener la velocidad necesaria para hallar la energía cinética.

$$\dot{r}_1^2 = V_{X_1}^2 + V_{Y_1}^2 + V_{Z_1}^2 \quad (4.17)$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -d_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + d_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = V_{x1} \\ \dot{Y}_1 &= -d_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - d_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) = V_{y1} \\ \dot{Z}_1 &= d_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) = V_{z1} \end{aligned}$$

⁵⁵Fuente: Diseñado y editado por los autores

Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \\
&\quad - 2d_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\
\dot{Y}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \\
&\quad + 2d_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\
\dot{Z}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1)
\end{aligned}$$

Sumando las velocidades, el tercer término de $V_{X_1}^2$ y $V_{Y_1}^2$ se cancelan. Ahora se procede a factorizar para dejar la expresión más pequeña.

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) (\sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)) \\
&\quad + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) (\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) \\
&\quad + d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1)
\end{aligned}$$

Las expresiones que se encuentran entre paréntesis por identidades trigonométricas son igual a 1.

$$\dot{r}_1^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) + d_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1)$$

Factorizando de nuevo.

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1)) + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \\
\dot{r}_1^2 &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Ahora se halla la energía cinética para m_1 .

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m V^2 \\
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 \\
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) + \frac{1}{2} I_T (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Posteriormente se calcula la energía potencial para m_1 .

$$\begin{aligned}
V &= mgh \\
V_1 &= m_1 g Z_1
\end{aligned}$$

Reemplazando con la ecuación (4.16) se tiene:

$$V_1 = m_1 g d_1 \sin(\theta_1) \tag{4.20}$$

Ya teniendo la energía cinética de m_1 , se procede a realizar el mismo procedimiento para hallar m_2 .

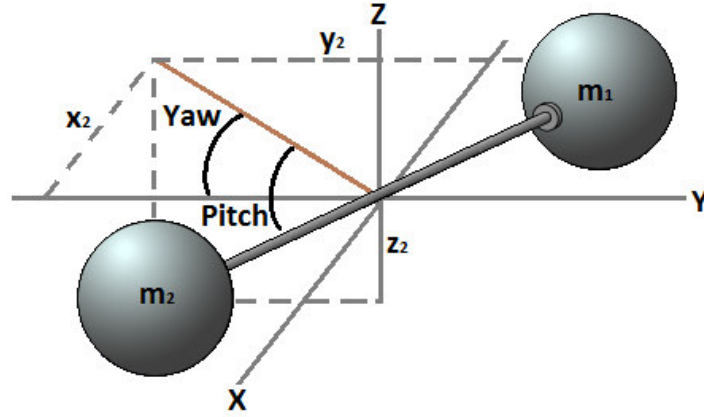


Figura 37: Coordenadas generalizadas en m_2 .⁵⁶

Ahora se realizará la descomposición vectorial con respecto a m_2 para así obtener X_2 , Y_2 y Z_2 .

Manteniendo el concepto de las ecuaciones (4.14) y (4.15), entonces:

$$\begin{aligned} X_2 &= d_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ Y_2 &= d_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ Z_2 &= -d_2 \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Se deriva y suma cada uno al cuadrado para obtener la velocidad de m_2 .

$$\dot{r}_2^2 = V_{X_2}^2 + V_{Y_2}^2 + V_{Z_2}^2$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -d_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + d_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = V_{x2} \\ \dot{Y}_2 &= -d_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - d_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) = V_{y2} \\ \dot{Z}_2 &= -d_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) = V_{z2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \dot{X}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \\ &\quad - 2d_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\ \dot{Y}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \\ &\quad + 2d_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\ \dot{Z}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) \end{aligned}$$

⁵⁶Fuente: Diseñado y editado por los autores

Restando y factorizando.

$$\begin{aligned}
\dot{r}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) (\sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)) \\
&\quad + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) (\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) \\
&\quad + d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) \\
\dot{r}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) + d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) \\
\dot{r}_2^2 &= d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ahora se halla la energía cinética para m_2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \tag{4.23}$$

Luego se calcula la energía potencial reemplazando con la ecuación (4.21)

$$V_2 = -m_2 g d_2 \sin(\theta_1) \tag{4.24}$$

Se suman las energías cinéticas T_1 y T_2 y las energías potenciales V_1 y V_2 , para después restar la energías totales. Sumando las energías cinéticas de las ecuaciones (4.20) y (4.24).

$$\begin{aligned}
V_T &= V_1 + V_2 \\
V_T &= m_1 g d_1 \sin(\theta_1) - m_2 g d_2 \sin(\theta_1)
\end{aligned}$$

Sumando las energías potenciales de las ecuaciones (4.19) y (4.23).

$$\begin{aligned}
T_T &= T_1 + T_2 \\
T_T &= \left(\frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) + \frac{1}{2} I_T (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \right)
\end{aligned}$$

A continuación se restan las energías para obtener la ecuación de Lagrange.

$$\begin{aligned}
L &= T_T - V_T \\
L &= \frac{1}{2} m_1 d_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1)) + \frac{1}{2} I_T (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1)) \\
&\quad - (m_1 g d_1 \sin(\theta_1) - m_2 g d_2 \sin(\theta_1))
\end{aligned}$$

Se procede a realizar derivadas parciales con respecto a θ_1 .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1 + I_T \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 d_1^2 \ddot{\theta}_1 + I_T \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & -m_1 d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) - m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & - m_1 g d_1 \cos(\theta_1) + m_2 g d_2 \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se restan las ecuaciones (4.25), (4.26) y se adiciona la Viscosidad cinemática para obtener el torque τ_1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \beta_1 \dot{\theta}_1 &= \tau_1 \\ \tau_1 = & m_1 d_1^2 \ddot{\theta}_1 + I_T \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 d_1^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & + m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & + m_1 g d_1 \cos(\theta_1) - m_2 g d_2 \cos(\theta_1) + \beta_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se procede a realizar derivadas parciales con respecto a θ_2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_1 d_1^2 \dot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) + I_T \dot{\theta}_2 + m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_1 d_1^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) - 2m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) - 2m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + I_T \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (4.29)$$

Se restan las ecuaciones (4.28), (4.29) y se adiciona la Viscosidad cinemática para obtener el torque τ_2

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_1 d_1^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) + I_T \ddot{\theta}_2 + \beta_2 \dot{\theta}_2 \\ & - 2m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) - m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2(\theta_1) \\ & - 2m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Y así finalmente se obtienen los torques τ_1 y τ_2 que se encuentran representadas en las ecuaciones (4.27) y (4.30) respectivamente.

4.5.1. Linealización del modelo matemático.

Con la obtención de las ecuaciones (4.27) y (4.30) de Euler-Lagrange se procede a reemplazar en cada una de ellas con base a lo siguiente:

$$\begin{aligned} X_1 &= \theta_1 \\ X_2 &= \dot{\theta}_1 \\ X_3 &= \theta_2 \\ X_4 &= \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}\tau_1 = & m_1 d_1^2 \dot{X}_2 + I_T \dot{X}_2 + m_2 d_2^2 \dot{X}_2 + m_1 d_1^2 X_4^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & + m_2 d_2^2 X_4^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ & + m_1 g d_1 \cos(X_1) - m_2 g d_2 \cos(X_1) + \beta_1 X_2\end{aligned}$$

Se obtiene $\dot{X}_1$ y se despeja $\dot{X}_2$

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_2 = & \frac{\tau_1 - m_1 d_1^2 X_4^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) - m_2 d_2^2 X_4^2 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1)}{m_1 d_1^2 + I_T + m_2 d_2^2} \\ & + \frac{-m_1 g d_1 \cos(X_1) + m_2 g d_2 \cos(X_1) - \beta_1 X_2}{m_1 d_1^2 + I_T + m_2 d_2^2}\end{aligned} \quad (4.32)$$

Se procede con τ_2

$$\begin{aligned}\tau_2 = & m_1 d_1^2 \dot{X}_4 \cos^2(X_1) - 2m_1 d_1^2 X_2 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1) \\ & + m_2 d_2^2 \dot{X}_4 \cos^2(X_1) - 2m_2 d_2^2 X_2 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1) \\ & + I_T \dot{X}_4 + \beta_2 X_4\end{aligned}$$

Se obtiene $\dot{X}_3$ y se despeja $\dot{X}_4$

$$\dot{X}_3 = X_4 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_4 = & \frac{\tau_2 + 2m_1 d_1^2 X_2 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1)}{m_1 d_1^2 \cos^2(X_1) + m_2 d_2^2 \cos^2(X_1) + I_T} \\ & + \frac{2m_2 d_2^2 X_2 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1) - \beta_2 X_4}{m_1 d_1^2 \cos^2(X_1) + m_2 d_2^2 \cos^2(X_1) + I_T}\end{aligned} \quad (4.34)$$

Ahora según la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} & \frac{\partial F_2}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3}{\partial X_3} & \frac{\partial F_3}{\partial X_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \frac{\partial F_4}{\partial X_2} & \frac{\partial F_4}{\partial X_3} & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & e \end{bmatrix}$$

Dónde:

$$\begin{aligned}a = & \frac{2d_1^2 m_1 X_4 - 2d_2^2 m_2 X_4}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + I_T} \\ b = & \frac{-\beta_1}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + I_T} \\ c = & \frac{-d_1^2 m_1 \cos^2(X_1) \sin(X_1) + d_2^2 m_2 \cos^2(X_1) \sin(X_1)}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + I_T}\end{aligned}$$

$$d = \frac{2d_1^2 m_1 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1) + 2d_2^2 m_2 X_4 \cos(X_1) \sin(X_1)}{d_1^2 m_1 \cos^2(X_1) + d_2^2 m_2 \cos^2(X_1) + I_T}$$

$$e = \frac{2d_1^2 m_1 X_2 \cos(X_1) \sin(X_1) + 2d_2^2 m_2 X_2 \cos(X_1) \sin(X_1) - \beta_2}{d_1^2 m_1 \cos^2(X_1) + d_2^2 m_2 \cos^2(X_1) + I_T}$$

”Un punto de equilibrio del sistema dinámico representa las condiciones de las variables del sistema, por lo que este se encuentra estático. Por ejemplo, en el caso de una partícula si se encuentra en reposo sin alguna fuerza externa que representa una entrada, entonces se dice que se encuentra en un punto de equilibrio. Entonces, un punto de equilibrio está dado en: $\dot{x} = f(x^0, u^0) = 0$.”⁵⁷

Se linealiza en un punto de equilibrio dado por:

$$X_1 = -59^\circ$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 0$$

Se procede a reemplazar en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Donde

$$a = \frac{-\beta_1}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + I_T} \quad (4.36)$$

$$b = \frac{-d_1^2 m_1 \cos^2(X_1) \sin(X_1) + d_2^2 m_2 \cos^2(X_1) \sin(X_1)}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + I_T} \quad (4.37)$$

$$c = \frac{-\beta_2}{d_1^2 m_1 \cos^2(X_1) + d_2^2 m_2 \cos^2(X_1) + I_T} \quad (4.38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

⁵⁷Fuente: Tomada el 3 de Noviembre de 2014. Disponible en http://www.fime.uanl.mx/salinas/APUNTES5_CM.pdf

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Los valores de cada término son los siguientes:

$$m_1 = 1.6Kg$$

$$m_2 = 1.4Kg$$

$$d_1 = 0.2m$$

$$d_2 = 0.2m$$

$$\beta_1 = 0.8mm^2/s$$

$$\beta_2 = 0.8mm^2/s$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.11) se obtiene la inercia total.

$$I_T = 128.27 \cdot 10^{-3}Kg \cdot m^2$$

4.6. DISEÑO DE CONTROLADORES

Para controlar el sistema se tuvo en cuenta las matrices y los valores de todas las variables para obtener las funciones de transferencia con respecto a Pitch (θ_1) y Yaw (θ_2). Con el comando *ss2tf* de Matlab® se obtuvieron las funciones de transferencia las cuales son:

$$G_{\theta_1 s} = \frac{0.007327s + 8.677 \cdot 10^{-18}}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.42)$$

$$G_{\theta_2 s} = \frac{s + 3.222}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.43)$$

Ahora se obtendrán las funciones de transferencia algebraicamente, teniendo en cuenta

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Aplicando Laplace

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$y(s) = Cx(s)$$

Se despeja $Bu(s)$, se factoriza y luego se despeja $x(s)$

$$Bu(s) = (sI - A)x(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

Reemplazando en $y(s)$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

Se expresa la ecuación $y(s)/u(s)$ para obtener la función de transferencia.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B$$

Para la función de transferencia con respecto a θ_1 se debe de tener en cuenta

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando los calculos se tiene:

$$G_{\theta_1 S} = \frac{0.007327s + 8.677 \cdot 10^{-18}}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.44)$$

Para la función de transferencia con respecto a θ_2 se debe de tener en cuenta

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando los cálculos se tiene:

$$G_{\theta_2 S} = \frac{s + 3.222}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.45)$$

Comparando la ecuación (4.42) con (4.44) y la ecuación (4.43) con (4.45), se comprueban los valores de las funciones de transferencia obtenidos por dos métodos mencionados anteriormente.

4.6.1. Controlador SISO

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente se procedió a aplicar el *Criterio de estabilidad de Routh Hurwitz* con el cual se puede conocer la estabilidad de un sistema sin necesidad de factorizar sus raíces [30]. Para aplicar el arreglo se debe obtener la ecuación característica, por lo cual se cerró el lazo como se ve en la Figura 38 y se realizó algebra de bloques.

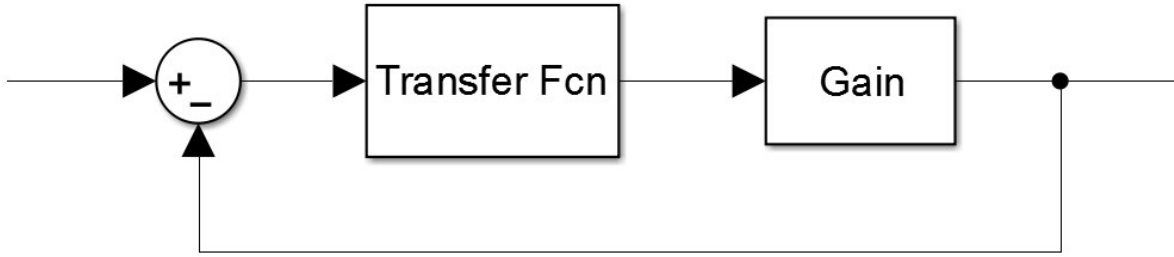


Figura 38: Diagrama de bloques lazo cerrado.⁵⁸

Ángulo Pitch

Para el ángulo θ_1 que corresponde a la ecuación (4.44).

$$G_{\theta_1}s = G_{P_1}$$

$$P_{(s)} = \frac{kG_{p_1}}{1 + kG_{p_1}}$$

La ecuación característica es la siguiente:

$$P_{(s)} = s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2 + 7.327 \cdot 10^{-3}sK + 8.677 \cdot 10^{-18}K$$

Ahora se procede a realizar el arreglo de Routh Hurwitz.

s^4	1	16.1	$8.677 \cdot 10^{-18}K$
s^3	8.219	$7.327 \cdot 10^{-3}K$	
s^2	$-891.471 \cdot 10^{-6}(K - 18.06 \cdot 10^3)$	$8.677 \cdot 10^{-18}K$	
s^1	$\frac{7.327 \cdot 10^{-3}K(K - 18.06 \cdot 10^3)}{K - 18.06 \cdot 10^3}$		
s^0	$8.677 \cdot 10^{-18}K$		

Cuadro 14: Arreglo de Routh Hurwitz θ_1 .⁵⁹

Para aplicar el método de Ziegler-Nichols se halló la ganancia y el tiempo crítico, por lo anterior se desean raíces simétricas y se buscó filas de ceros. Se encontró un valor para K_{cr} (debe ser positivo) para que una de las filas sea igual a 0, se halló raíces críticas para la fila s^1 , despejando se obtuvo

$$K_{cr} = 18.63 \cdot 10^3 \text{ o } K_{cr} = 0$$

⁵⁸Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁵⁹Fuente: Diseñado y editado por los autores

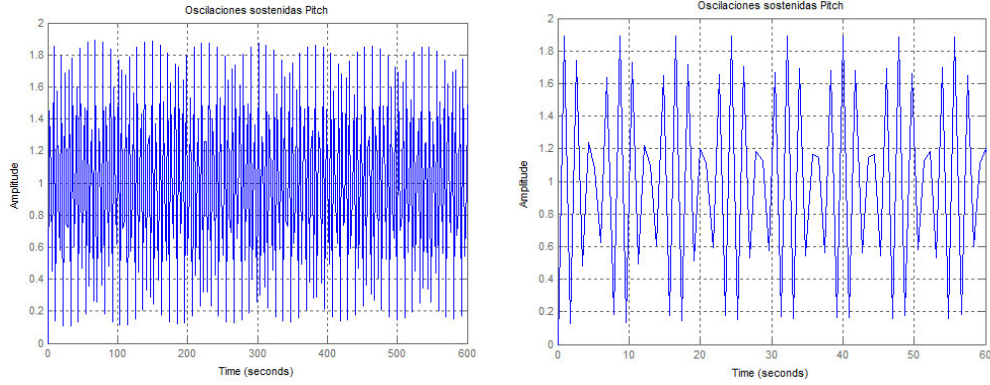


Figura 39: Oscilaciones Sostenidas de $G_{\theta_1}s$.⁶⁰

Las raíces críticas son las raíces del polinomio auxiliar, conformado con los coeficientes de la fila anterior.

$$A(s) = 8.219s^3 + 7.327 \cdot 10^{-3}Ks$$

Cuyas raíces son

$$s_{1,2} = \pm 4.012i$$

Teniendo en cuenta

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{w_{cr}}$$

Entonces

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{4.012} = 1.56s$$

Por el método de Ziegler-Nichols para obtener un controlador PID se debe tener en cuenta

$$T_i = 0.5T_{cr}$$

$$T_d = 0.125T_{cr}$$

$$K_p = 0.6 \frac{K_{cr}}{K}$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$K_d = K_p T_d$$

Donde

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\theta_1}s = 8.677 \cdot 10^{-18}$$

Entonces, con un $K_{cr} = 18.63 \cdot 10^3$

$$T_i = 0.783$$

⁶⁰Fuente: Diseñado y editado por los autores

$$T_d = 0.195$$

$$K_p = 1.29 \cdot 10^{21}$$

$$K_i = 1.645 \cdot 10^{21}$$

$$K_d = 252.18 \cdot 10^{18}$$

Con los valores de K_p , K_i y K_d se obtuvo una respuesta ideal de pitch, pero debido a lo anterior el tiempo de estabilización es demasiado pequeño como se ve en la Figura 40a, se sintonizó el controlador para obtener una respuesta más cercana a la realidad, en la Figura 40b se ilustra la estabilización del ángulo.

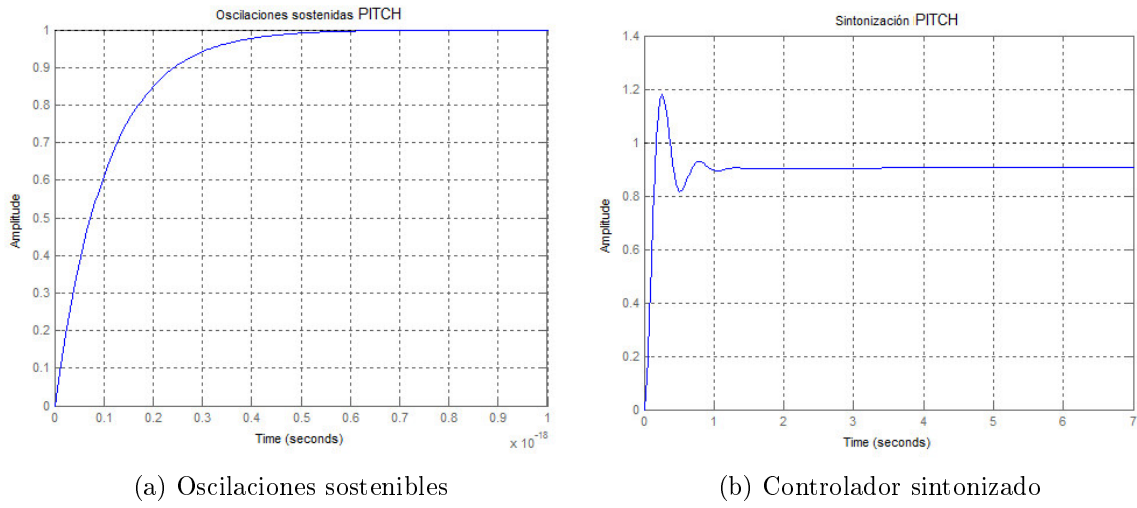


Figura 40: Respuesta a un escalón.⁶¹

Los valores de la sintonización son:

$$K_p = 100$$

$$K_i = 20 \cdot 10^3$$

$$K_d = 200$$

Ángulo Yaw

Se continuó con θ_2 que corresponde a la ecuación (4.45). La ecuación característica es la siguiente

$$P_{(s)} = s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2 + 1sK + 3.222K$$

Ahora se procede a realizar el arreglo.

⁶¹Fuente: Diseñado y editado por los autores

s^4	1	16.1	$3.222K$
s^3	8.219	$1K$	
s^2	$-121.669 \cdot 10^{-3}(K - 132.326)$	$3.222K$	
s^1	$\frac{K(K+85.326)}{K-132.326}$		
s^0	$3.222K$		

Cuadro 15: Arreglo de Routh Hurwitz θ_2 .⁶²

Obteniendo

$$K_{cr} = 132.326$$

En la Figura 41 se observa las oscilaciones sostenidas, con el $K_{crhallado}$.

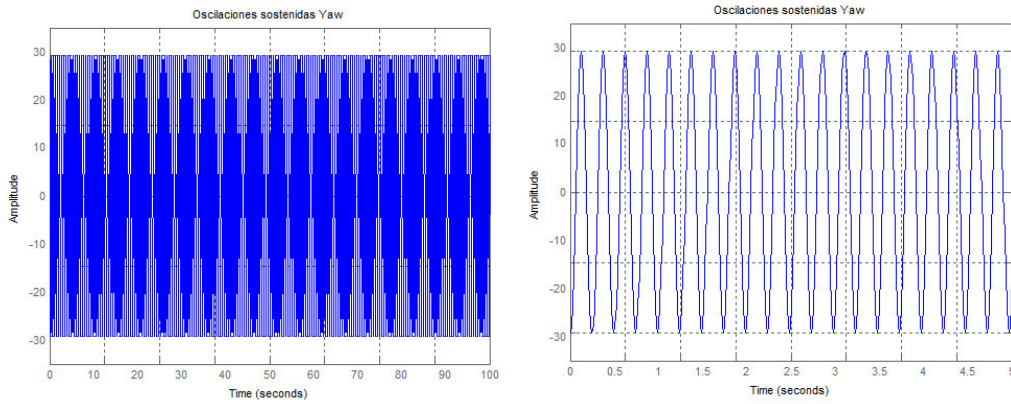


Figura 41: Oscilaciones Sostenidas de $G_{\theta_2}s$.⁶³

Raices del polinomio auxiliar.

$$A(s) = 8.219s^3 + Ks$$

Cuyas raices son

$$s_{1,2} = \pm 4.012$$

Entonces

$$T_{cr} = 1.56s$$

⁶²Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁶³Fuente: Diseñado y editado por los autores

Teniendo en cuenta el método de Ziegler-Nichols para el controlador PID se obtuvo

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\theta_1} s = 3.222$$

Entonces

$$T_i = 0.783$$

$$T_d = 0.195$$

$$K_p = 24.6417$$

$$K_i = 31.472$$

$$K_d = 4.823$$

Con los valores de K_p , K_i y K_d se obtuvo una respuesta ideal de Yaw, se ilustra en 42 la estabilización del ángulo.

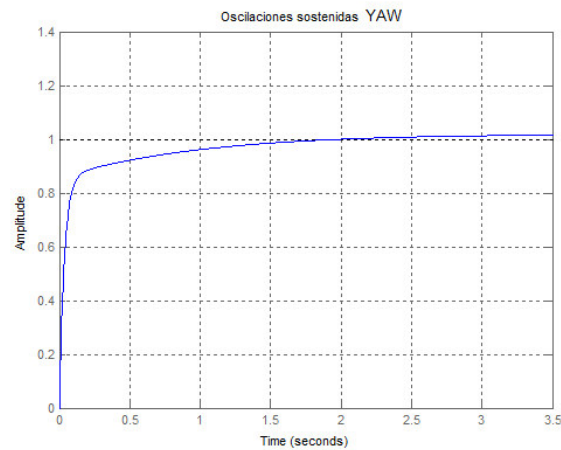


Figura 42: Respuesta a un escalón.⁶⁴

En la Figura 43 se observa el diagrama del controlador SISO acoplado al helicóptero de dos grados de libertad, para observar su comportamiento real.

⁶⁴Fuente: Diseñado y editado por los autores

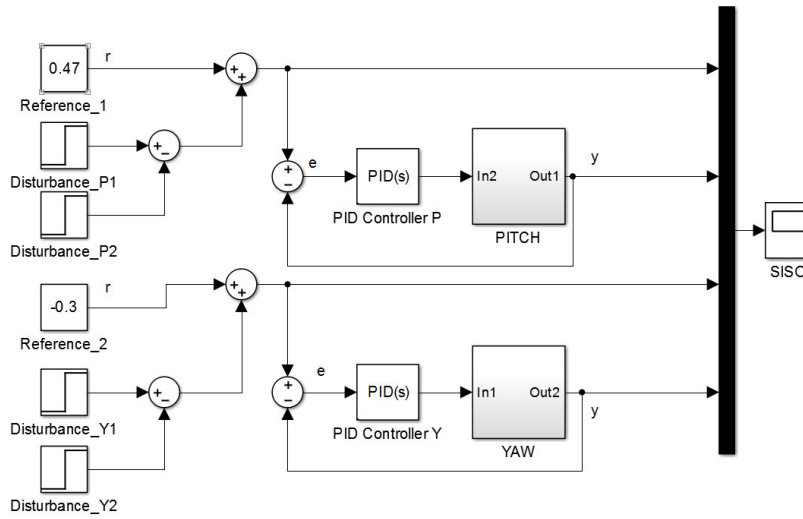


Figura 43: Controlador SISO en Simulink.⁶⁵

Una vez adaptado el controlador, la planta tuvo unas respuestas reales en Pitch y Yaw, las cuales contaban con unas referencias variables para observar su comportamiento a la acción de control, donde se visualiza su rápida estabilización, se muestran en las Figuras 44 y 45.

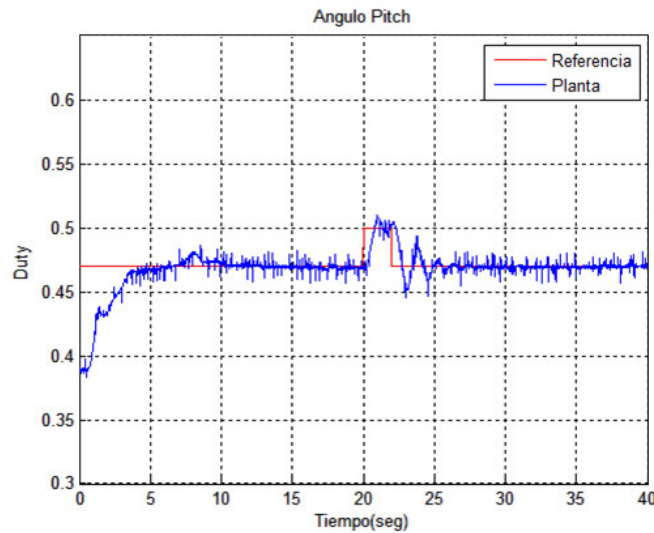


Figura 44: Respuesta del ángulo Pitch.⁶⁶

En la gráfica de Yaw se observa en el inicio se tiene un sobre pico de duración de más o menos 9 segundos, esto se debe al efecto de coriolis generado por la hélice de Pitch, pero el controlador entra rápidamente a corregirlo y a seguir la referencia variable.

⁶⁵Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁶⁶Fuente: Diseñado y editado por los autores

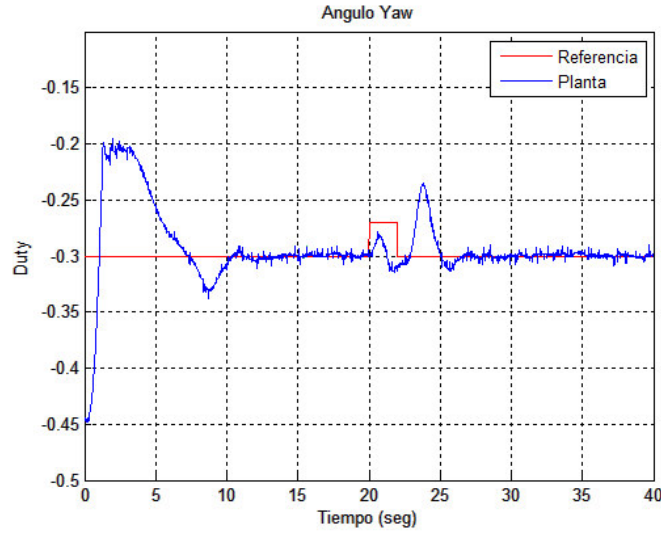


Figura 45: Respuesta del ángulo Yaw.⁶⁷

4.7. SISTEMA DE CONTROL MIMO *CROSS-CONTROL* POR DESACOPLE

El control PID MIMO *Cross-control* por desacople consiste en aplicar 4 controladores PIDs los cuales permitirán desacoplar es sistema y realizar una acción de control que tenga en cuenta las variaciones que genera un grado de libertad con respecto al otro, en este caso θ_1 y θ_2 . Para realizar esta técnica primero se debe analizar la estructura que rige a este controlador, la cual se muestra a continuación [31]:

(Los calculos que se realizarán a continuación se dejarán expresados en letras para una mayor facilidad de análisis)

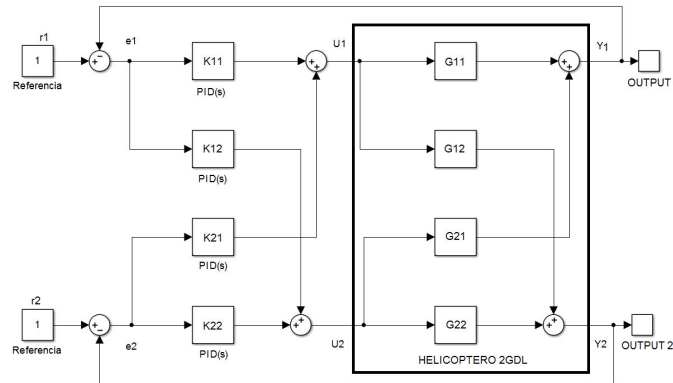


Figura 46: Estructura de MIMO desacoplado.⁶⁸

⁶⁷Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁶⁸Fuente: Diseñado y editado por los autores

Matemáticamente esta estructura se puede expresar de la siguiente forma:

$$U_1 = K_{11}e_1 + K_{21}e_2$$

$$U_2 = K_{12}e_1 + K_{22}e_2$$

Donde vectorialmente se ve expresado como:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Esta expresión se puede reducir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{K}] * \begin{bmatrix} r_1 - Y_1 \\ r_2 - Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{K}] * \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - [\mathbf{K}] * \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} * \left([\mathbf{K}] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \right)$$

Simplificando esta expresión nos queda de la siguiente manera:

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{G}] * [\mathbf{KR} - \mathbf{KY}]$$

Despejando

$$(\mathbf{I} + \mathbf{GK})\mathbf{Y} = \mathbf{GKR}$$

Despejando Y:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} * \mathbf{GKR}$$

Donde $\mathbf{G}$ y $\mathbf{K}$ son matrices 2x2, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{R}$ son matrices 2x1.

Las funciones correspondientes a G_{11} , G_{12} , G_{21} y G_{22} que son respecto a Pitch (θ_1), Yaw (θ_2), torque 1 (τ_1) y torque 2 (τ_2). Con el comando *ss2tf* de Matlab® se obtuvieron las funciones de transferencia las cuales son:

$$G_{11} = G_{\theta_1 \tau_1} s = \frac{s^2 + 49.97 \cdot 10^{-18}}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.46)$$

$$G_{22} = G_{\theta_2 \tau_2} S = \frac{s^2 + 3.222}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.47)$$

$$G_{12} = G_{\theta_1 \tau_2} S = \frac{0.007327s + 8.677 \cdot 10^{-18}}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.48)$$

$$G_{21} = G_{\theta_2 \tau_1} S = \frac{0.001s}{s^4 + 8.219s^3 + 16.1s^2} \quad (4.49)$$

Manteniendo una aproximación del control SISO se hizo una sintonización para los cuatro controladores, los cuales son:

$G_{\theta\tau}$	K_p	K_i	K_d
G_{11}	120.3	135.5	80
G_{12}	8	5	0.1
G_{21}	7	6	0.4
G_{22}	42	28	9.35

Cuadro 16: Sintinización constantes⁶⁹PID.

Realizando el procedimiento mencionado anteriormente, virtualmente el controlador se comportó de la siguiente forma:

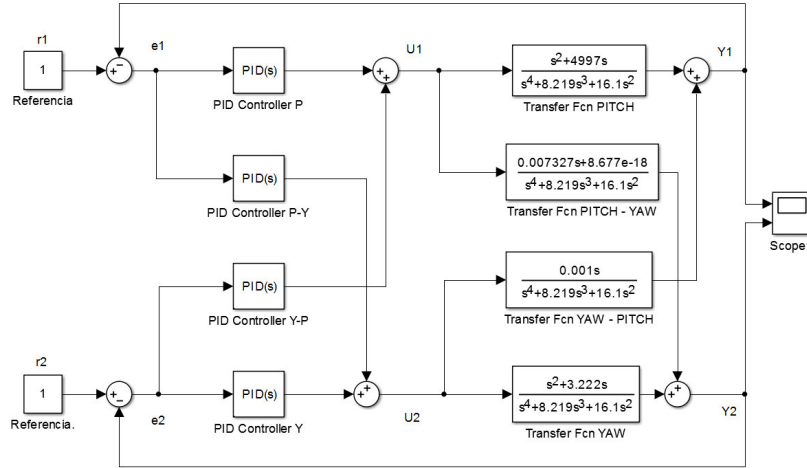


Figura 47: Controlador MIMO por desacople en Simulink.⁷⁰

Los controladores se sintonizaron, agregándole al bloque PID Controller P un impulso y visualizando el comportamiento en la salida de la función de transferencia de Pitch y cambiar las constantes K_p , K_i y K_d para que se llegara a la referencia de la mejor manera y del mismo modo al controlador de Pitch-Yaw, lo que da una relación entre las entradas y salidas cruzadas de los ángulos Pitch y Yaw. Se realizó el mismo procedimiento para el controlador Yaw y Yaw-Pitch.

⁶⁹Fuente: Diseñado por los autores

⁷⁰Fuente: Diseñado y editado por los autores

Pitch y Yaw se comportaron como se muestra en la las Figuras 48 y 49

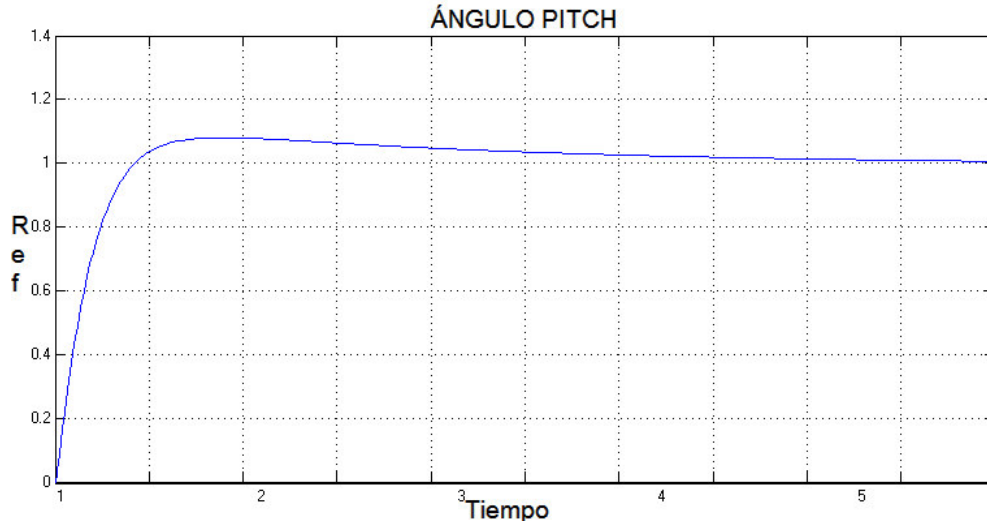


Figura 48: Respuesta de Pitch a la referencia.⁷¹

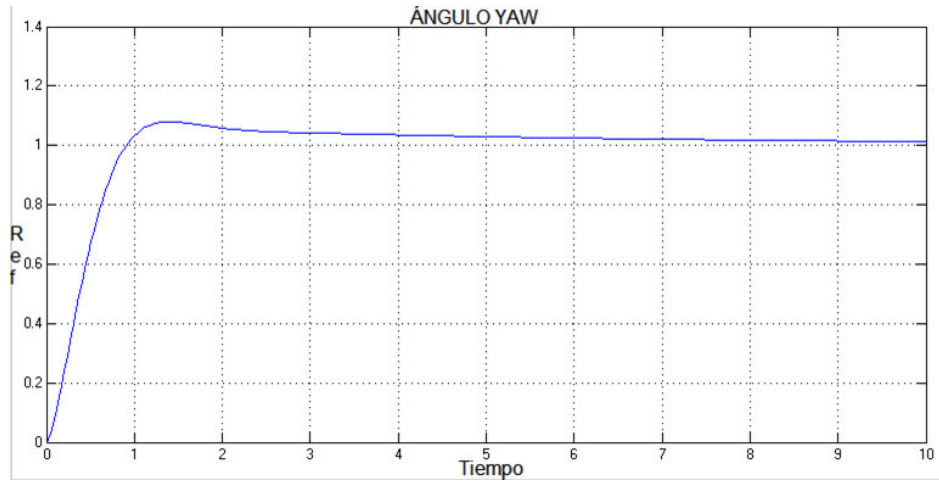


Figura 49: Respuesta de Yaw a la referencia.⁷²

En la Figura 50 se observa el diagrama del controlador MIMO acoplado al helicóptero de dos grados de libertad, para observar su comportamiento real. Este cuenta con 4 controladores, dos van en serie como si fuera el controlador SISO, y otros dos, los cuales se encargan de desacoplar al sistema, permitiendo que la entrada del ángulo Pitch afecte a la salida del ángulo Yaw y así permitir controlar los efectos que generan entre sí.

⁷¹Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁷²Fuente: Diseñado y editado por los autores

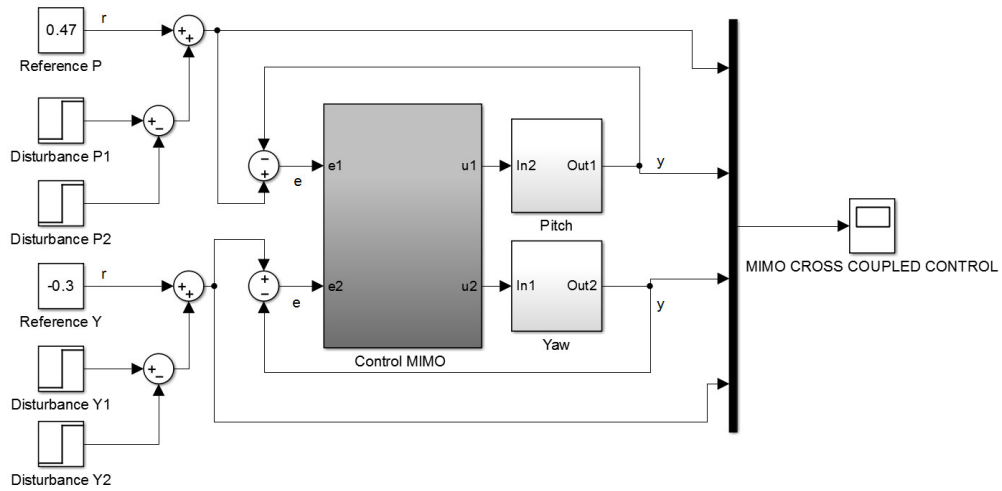


Figura 50: Controlador MIMO en Simulink.⁷³

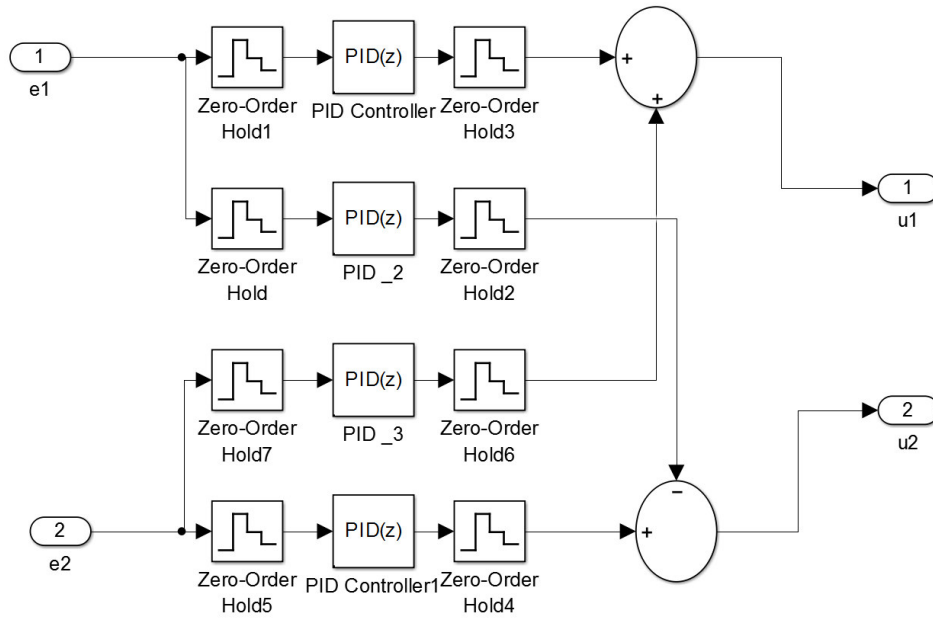


Figura 51: Estructura interna controlador MIMO en Simulink.⁷⁴

Una vez adaptado el controlador la planta tuvo unas respuestas reales en Pitch y Yaw, las cuales contaban con unas referencias variables para observar su rápida estabilización, como se visualiza en las Figuras 52 y 53.

⁷³Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁷⁴Fuente: Diseñado y editado por los autores

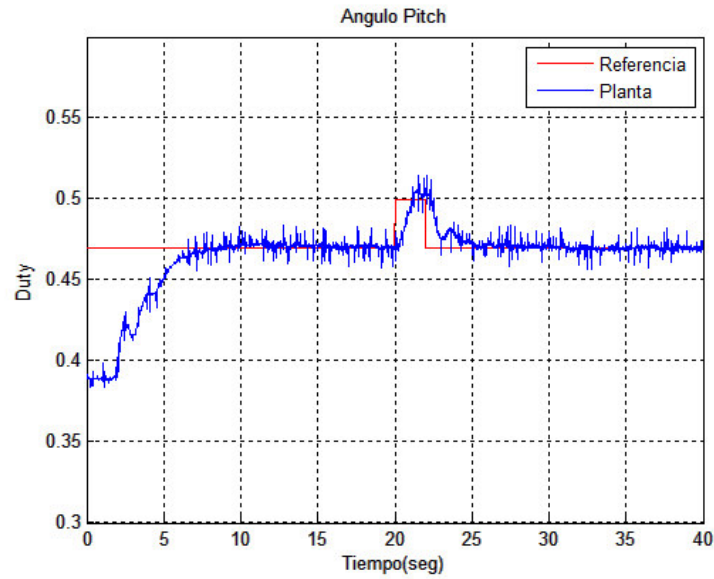


Figura 52: Respuesta del ángulo Pitch.⁷⁵

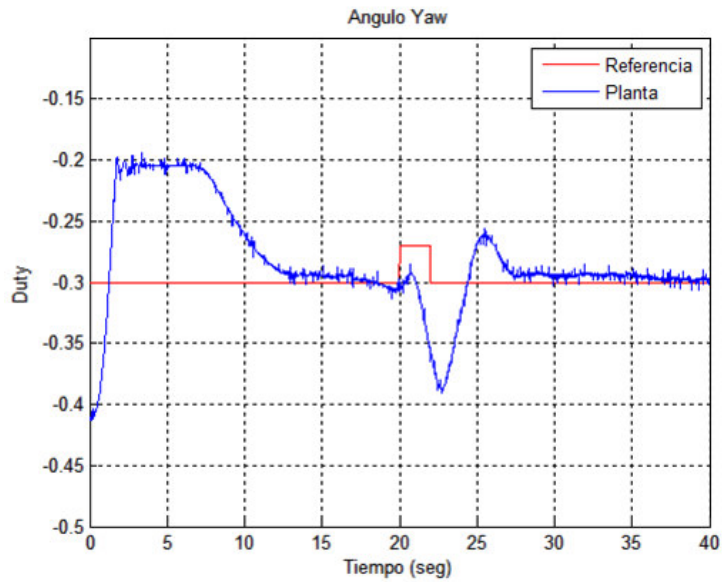


Figura 53: Respuesta del ángulo Yaw.⁷⁶

Comparando las figuras 48 y 49 que muestran el comportamiento del helicóptero virtual con las figuras 52 y 53 que son las del helicóptero Físico, se nota que este controlador tuvo problemas en llegar a la referencia rápidamente y fue casi imposible erradicar el sobre pico en ambos ángulos.

⁷⁵Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁷⁶Fuente: Diseñado y editado por los autores

4.8. CONTROL PI VECTORIAL

4.8.1. Sin observador de estado.

A partir del sistema descrito por ecuaciones de estado, se puede analizar la estructura de este tipo de controlador.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

El esquema a continuación representa el sistema descrito por las ecuaciones de estado acoplado como PI Vectorial.

(Los calculos que se realizarán a continuación se dejarán expresados en letras para una mayor facilidad de análisis)

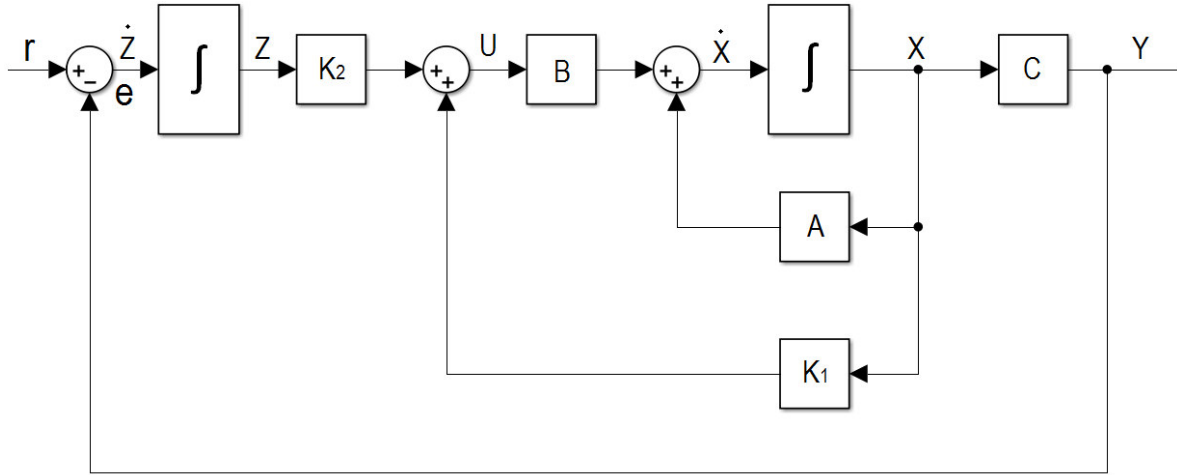


Figura 54: Estructura del controlador PI Vectorial.⁷⁷

Se analizó el esquema de la Figura 54 y se obtuvo lo siguiente

$$U = K_1x + K_2z$$

Donde $\dot{Z}$ representa el error de rastreo del sistema

$$\begin{aligned}r - y &= e = \dot{z} \\ \dot{z} &= -Cx + r\end{aligned}\tag{4.50}$$

$\dot{z}$ permite que la salida siga mejor la referencia.

$$\dot{x} = Ax + B(K_1x + K_2z)$$

⁷⁷Fuente: Tomada el 10 de Septiembre de 2014. Disponible en DIAZ, Hernando. Fundamentos de control. Diseño con variables de estado. p. 117-146

Factorizando

$$\dot{x} = (A + BK_1)x + BK_2z$$

Lo anterior demuestra la retroalimentación del sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.51}$$

Las ecuaciones (4.51) y (4.50) se pueden representar vectorialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Donde I es una matriz identidad $n \times 1$. Ahora es posible seleccionar una matriz de ganancias K_1 y K_2 . Adicionando estas matrices de ganancias y reemplazando u , la representación vectorial queda como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

De manera que la matriz tenga valores propios en una región aceptable. Donde $A + BK_1$ Es la matriz de estado en lazo cerrado y BK_2 se denomina pre compensador usado para dar atención a las especificaciones estáticas del sistema, es decir la respuesta en estado estacionario, esto se debe a que en la representación de variables de estado se tiene el inconveniente de no tener en cuenta la sección estática del sistema trabajado.

Lo anterior es posible siempre y cuando el Par (A, B) sea controlable, condición indispensable para este tipo de controlador.

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & -C \end{bmatrix} = n + P$$

Donde

$$\text{Rank}(A) = n$$

4.8.2. Con observador de estado.

Se analizó el esquema de la Figura 55 y se obtuvo lo siguiente.

Donde:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{x} = A\hat{x} + Bu + Ley$$

Donde Ley representa la matriz de acople del controlador virtual y real del sistema.

$$Ley = y - \hat{y} = Cx - C\hat{x}$$

$$\tilde{x} = A\hat{x} - LC\hat{x} + LCx + Bu$$

Factorizando

$$\tilde{x} = LCx + (A - LC)\hat{x} + Bu \quad (4.52)$$

Lo anterior demuestra la retroalimentación de estado del sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.53)$$

$$y = Cx$$

Por el diagrama se obtiene

$$\dot{z} = r - y \quad (4.54)$$

$$\dot{z} = r - Cx \quad (4.55)$$

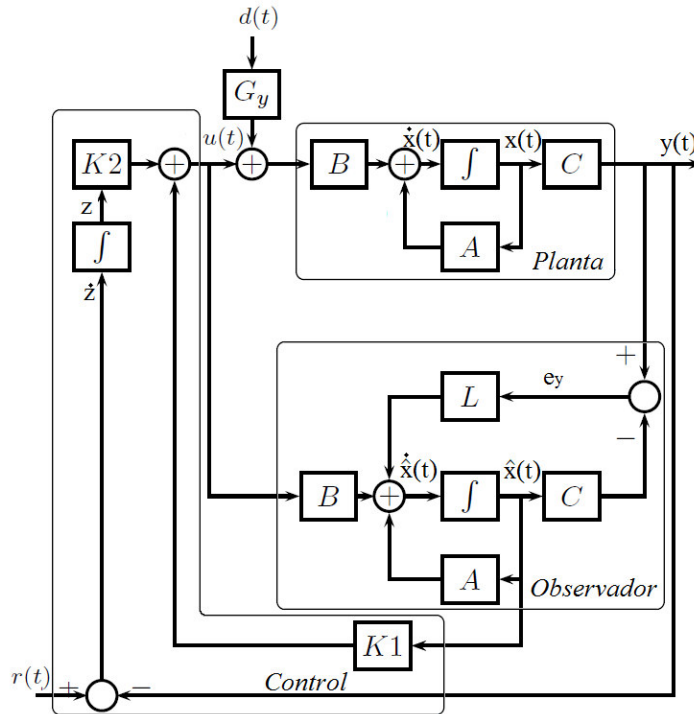


Figura 55: Estructura del controlador PI V con observador de estado.

Se realiza el procedimiento anterior teniendo en cuenta las ecuaciones (4.52), (4.53) y (4.55) para que las salidas virtuales del sistema y las reales sean exactamente iguales, lo que garantiza el correcto funcionamiento del sistema al controlarlo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \tilde{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{I} \end{bmatrix} r$$

De la Figura 55 se obtiene u .

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 z \quad (4.56)$$

Reemplazando u en las ecuaciones (4.52) y (4.53) la representación vectorial queda como:

$$\dot{x} = Ax + BK_1 \hat{x} + BK_2 z \quad (4.57)$$

$$\tilde{x} = LCx + (A - LC + BK_1) \hat{x} + BK_2 z \quad (4.58)$$

$$\dot{z} = -Cx + r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \tilde{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ LC & A - LC + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{I} \end{bmatrix} r$$

Observador

$$ex = x - \hat{x}$$

Donde x es de planta real y $\hat{x}$ es el estimador.

$$\dot{ex} = \dot{x} - \tilde{x}$$

$\dot{ex}$ es la ecuación que representa el error entre el controlador y el observador. Se reemplaza las ecuaciones (4.57) y (4.58) para obtener

$$\dot{ex} = Ax + BK_1 \hat{x} + BK_2 z - LCx - A\hat{x} - LC\hat{x} - BK_1 \hat{x} - BK_2 z$$

Factorizando

$$\dot{ex} = (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)ex$$

Para hallar la matriz de ganancia del observador L se puede usar un algoritmo de asignación de polos . Pero teniendo en cuenta que

$$\lambda(A - LC) = \lambda(A - LC)^T$$

$$\lambda(A - LC) = \lambda(A^T - C^T L^T)$$

Donde $\lambda(A)$ representa los valores propios de la matriz A , entonces, es posible usar el mismo algoritmo, usado para asignar los polos del controlador, para asignar los polos del observador [32].

⁷⁸Fuente: Diseñado y editado por los autores

4.8.3. Controlador

Sabiendo que

$$\hat{x} = x - ex$$

Se reemplaza en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK_1\hat{x} + BK_2z \\ \dot{x} &= (A + BK_1)x + BK_2z - BK_1ex \\ \dot{z} &= -Cx + r \\ \dot{ex} &= (A - LC)ex\end{aligned}$$

El sistema en lazo cerrado se representar vectorialmente como la ecuación de PI Vectorial anterior:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{ex} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 & -BK_1 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ ex \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I} \\ 0 \end{bmatrix} r \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{ex} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \end{bmatrix} & -BK_1 \\ \begin{bmatrix} -C & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & [A - LC] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ ex \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I} \\ 0 \end{bmatrix} r \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{ex} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right] & -BK_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & [A - LC] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ ex \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I} \\ 0 \end{bmatrix} r\end{aligned}$$

Representación con espacio de estado del controlador con observador.

Sabiendo que

$$e_y = y - C\hat{x}$$

Reemplazando u y e_y en la ecuación (4.52), se obtuvo.

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= A\hat{x} + BK_2z + BK_1\hat{x} + Ly - LC\hat{x} \\ \tilde{x} &= (A + BK_1 - LC)\hat{x} + BK_2z + Ly\end{aligned}\tag{4.59}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.54), (4.56) y (4.59).

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK_1 - LC & BK_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \\ u &= [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \\ (A + BK_1) &> 5(A - LC)\end{aligned}$$

Lo que refiere que los polos del observador tienen que ser como mínimo 5 veces más rápidos o más cercanos al origen que los polos del controlador, porque los polos del

observador tienen que actuar primero para poder evaluar el error con respecto al controlador y así reducir el error entre los dos.

Ahora bien, se procede a realizar el controlador PI Vectorial pertinente para el helicóptero de dos grados de libertad. Esto se realizó obteniendo las matrices características del sistema (A B C D) por medio las ecuaciones diferenciales de movimiento de Lagrange, como se presentó en el capítulo anterior. Según las ecuaciones 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.40 y 4.41 y los valores de las variables vistas en las matrices son los siguientes:

$$m_1 = 1.6Kg$$

$$m_2 = 1.4Kg$$

$$d_1 = 0.2m$$

$$d_2 = 0.2m$$

$$\beta_1 = 800mm^2/s$$

$$\beta_2 = 800mm^2/s$$

$$I_T = 128.27 \cdot 10^{-3}Kg \cdot m^2$$

La matriz de observabilidad es de:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.2223 & 0 & -0.0073 \\ 0 & 0 & 0 & -4.9968 \\ 0 & 10.3832 & 0 & 0.0602 \\ 0 & 0 & 0 & 24.9682 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es de:

$$Co = \begin{bmatrix} -0.0073 & 10.3832 & 0.0602 \\ 0.0602 & -33.4578 & -0.3770 \\ -4.9968 & 0 & 24.9682 \\ 24.9682 & 0 & -124.7619 \end{bmatrix}$$

El sistema es observable y controlable ya que el rango de la matriz Q y Co es de 4 y la longitud de la matriz A es de 4 por lo que la resta entre estos dos da cero, por tal razón se dice que el sistema es controlable y observable.

Aplicando la teoría de control PI Vectorial para la sección de control, las nuevas matrices (A B C D) quedan:

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2223 & 0 & -0.0073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.9968 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando la asignación de polos al controlador se escogieron los siguientes, los cuales están cercanos unos de otros para no tener polos dominantes en el controlador y así permitir que realice una mejor acción de control:

$$PolosPI = [-7.4250 \quad -7.1500 \quad -6.8750 \quad -6.3250 \quad -6.6000 \quad -7.4250]$$

La matriz de constantes K para el PI Vectorial queda:

$$KPI = \begin{bmatrix} -142.5719 & -17.4788 & -2.6755 & -0.1816 & 326.6782 & 9.4515 \\ -2.7030 & -0.1908 & -148.2062 & -16.1021 & 9.5483 & 346.5790 \end{bmatrix}$$

Las constantes K1 & K2 son las siguientes:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -142.5719 & -17.4788 & -2.6755 & -0.1816 \\ -2.7030 & -0.1908 & -148.2062 & -16.1021 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 326.6782 & 9.4515 \\ 9.5483 & 346.5790 \end{bmatrix}$$

La asignación de polos para el observador son los siguientes (dése cuenta que son por lo menos 5 veces mas rapidos que los del controlador):

$$PolosL = [-1.55650 \quad -1.61310 \quad -1.52820 \quad -1.58480]$$

Donde la matriz del observador queda:

$$L = \begin{bmatrix} -0.0568 & -0.0153 \\ 2.6875 & 0.0506 \\ -0.0268 & -1.8797 \\ 0.0920 & 11.8210 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el controlador PI Vectorial con el observador se muestra a continuación, basándose en la teoría mostrada anteriormente. Las nuevas matrices (A B C D) - (Ac Bc Cc Dc) Son:

$$A_C = \begin{bmatrix} 0.0568 & 1 & 0.0153 & 0 & 0 & 0 \\ -145.2594 & -20.7011 & -2.7261 & -0.1889 & 326.6782 & 9.4515 \\ 0.0268 & 0 & 1.8797 & 1 & 0 & 0 \\ -2.7949 & -0.1908 & -160.0273 & -21.0989 & 9.5483 & 346.5790 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_C = \begin{bmatrix} -0.0568 & -0.0153 & 0 & 0 \\ 2.6875 & 0.0506 & 0 & 0 \\ -0.0268 & -1.8797 & 0 & 0 \\ 0.0920 & 11.8210 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_C = \begin{bmatrix} -142.5719 & -17.4788 & -2.6755 & -0.1816 & 326.6782 & 9.4515 \\ -2.7030 & -0.1908 & -148.2062 & -16.1021 & 9.5483 & 346.5790 \end{bmatrix}$$

$$D_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El análisis hecho anteriormente, proporciona unos resultados, los cuales se evaluaron inicialmente de forma virtual usando álgebra de bloques con la herramienta computacional Simulink de Matlab, a continuación se muestran los resultados.

En la Figura 56 se ilustra el diagrama de bloques del controlador PI Vectorial cuando el ángulo Pitch sigue una referencia de paso unitario y el ángulo Yaw una referencia de cero. La Figura 57 muestra las gráficas del comportamiento de los ángulos Pitch y Yaw al seguir las referencias, el primero realiza el control adecuadamente, mientras que en el segundo se observa una leve perturbación la cual es corregida rápidamente por el controlador.

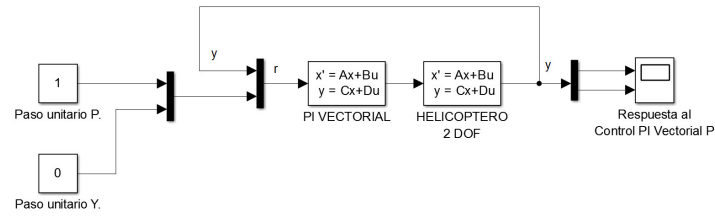


Figura 56: Estructura de bloques referencia Pitch.⁷⁹

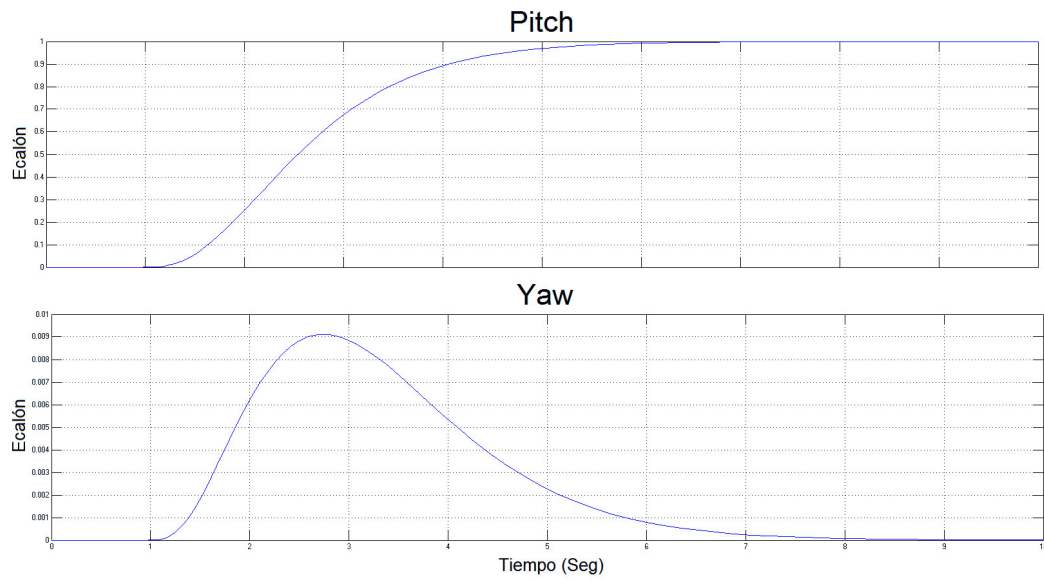


Figura 57: Respuesta al Controlador PIV referencia Pitch.⁸⁰

Se realiza el mismo procedimiento que el anterior pero en este caso la Figura 58 el diagrama de bloques del controlador PI Vectorial cuando el ángulo Pitch sigue una referencia de cero y el ángulo Yaw una referencia de paso unitario. La Figura 59 muestra un comportamiento contrario al anterior pero con la misma tendencia.

⁷⁹Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁸⁰Fuente: Diseñado y editado por los autores

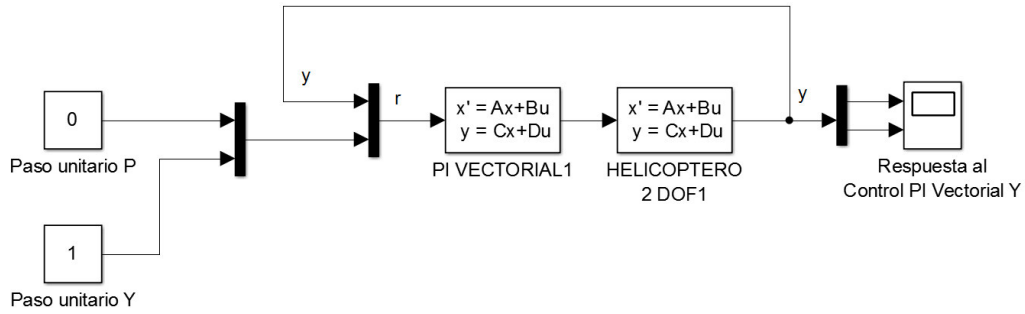


Figura 58: Estructura de bloques referencia Yaw.⁸¹

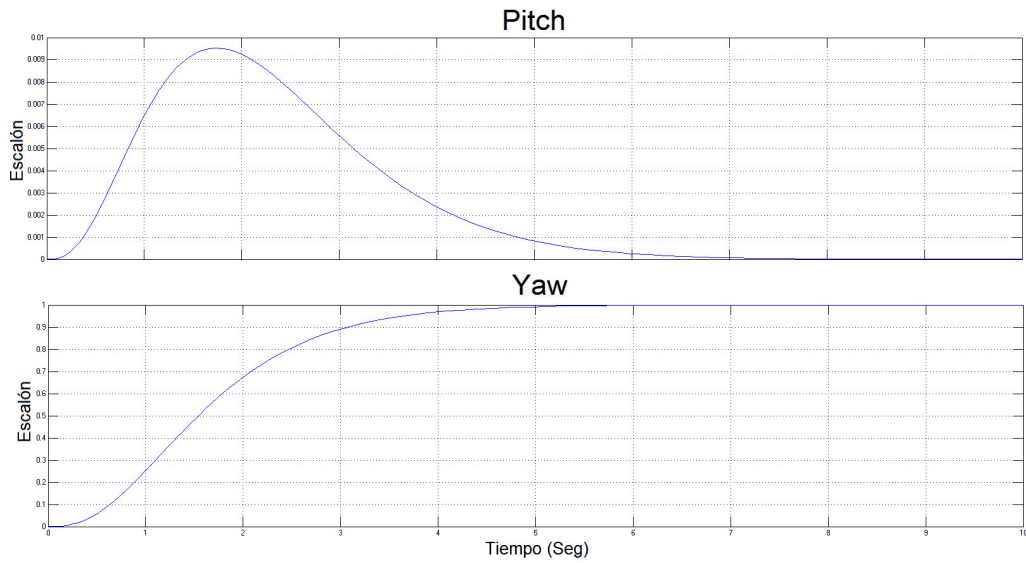


Figura 59: Respuesta al Controlador PIV referencia Yaw.⁸²

Para este caso la Figura 60 ilustra el diagrama de bloques del controlador PI Vectorial cuando el ángulo Pitch y Yaw sigue una referencia de paso unitario. La Figura 61 muestra las gráficas del comportamiento de los ángulos Pitch y Yaw al seguir dichas referencias, se nota el buen comportamiento de ambos ángulos a la hora de seguir tal referencia. Este caso es el que más se aproxima al real, donde ambos ángulos toman diferentes valores. Dicho esto, el control PI Vectorial ahora se evaluará con sistema real, el cual fue construido previamente por los autores de este trabajo.

⁸¹Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁸²Fuente: Diseñado y editado por los autores

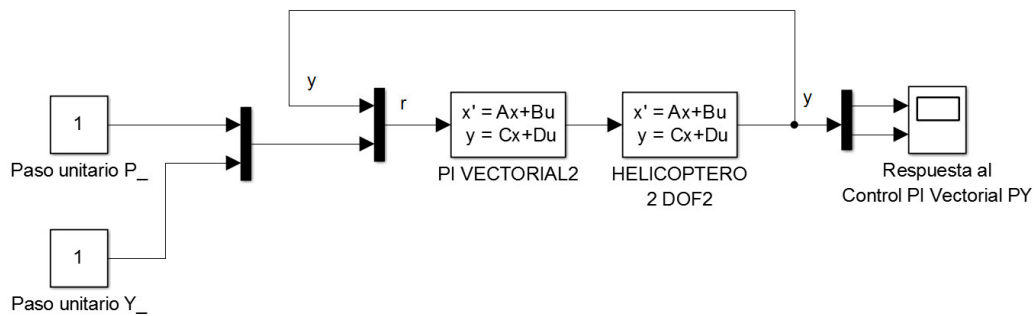


Figura 60: Estructura de bloques referencia Pitch y Yaw.⁸³

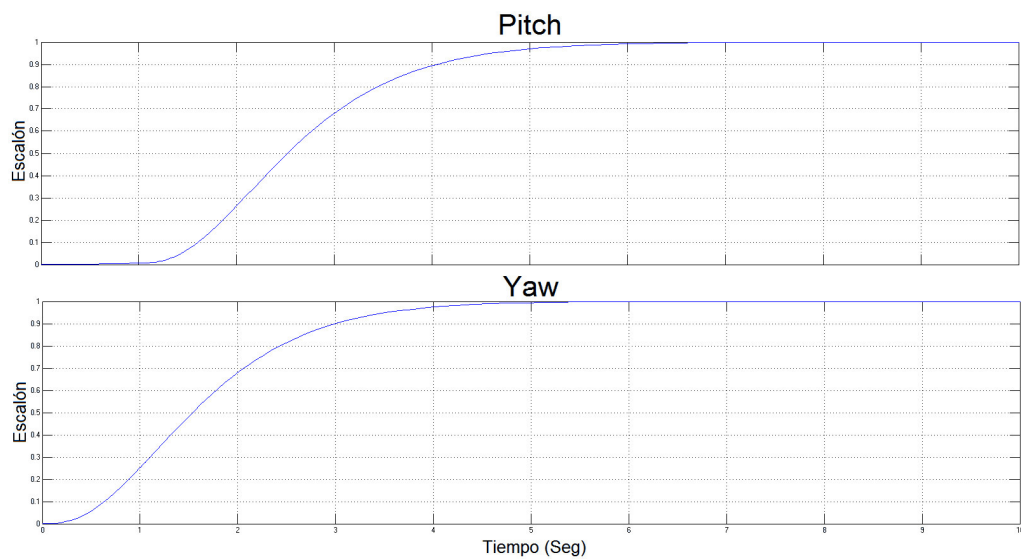


Figura 61: Respuesta al Controlador PIV referencia Pitch y Yaw.⁸⁴

Aplicando el controlador PI Vectorial al helicóptero de dos grados de libertad, escogiendo los mejores polos posibles en ambos casos (Controlador & Observador), se muestra la estructura del controlador de lazo cerrado y el comportamiento del mismo en los ángulos Pitch y Yaw.

⁸³Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁸⁴Fuente: Diseñado y editado por los autores

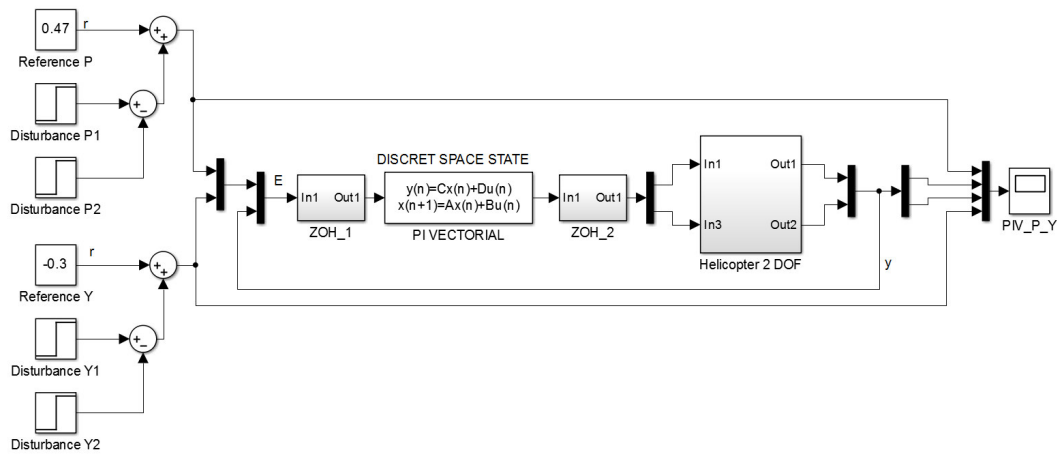


Figura 62: Control PI Vectorial en Simulink.⁸⁵

A continuación se muestra la respuesta del controlador PI Vectorial al ángulo Pitch siguiendo una referencia y su respectiva perturbación.

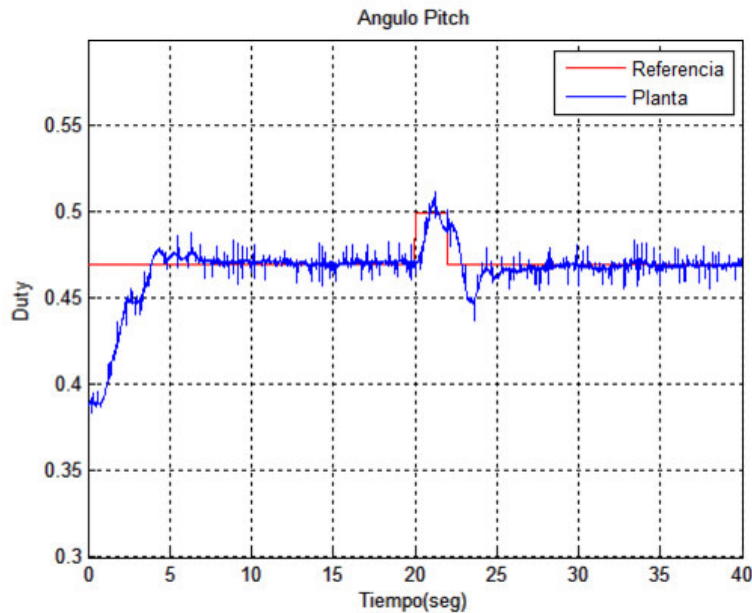


Figura 63: Respuesta del angulo Pitch al seguimiento de una referencia.⁸⁶

Al igual que en la figura anterior, posteriormente se muestra la respuesta del controlador PI vectorial al ángulo Yaw siguiendo una referencia y su respectiva perturbación.

⁸⁵Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁸⁶Fuente: Diseñado y editado por los autores

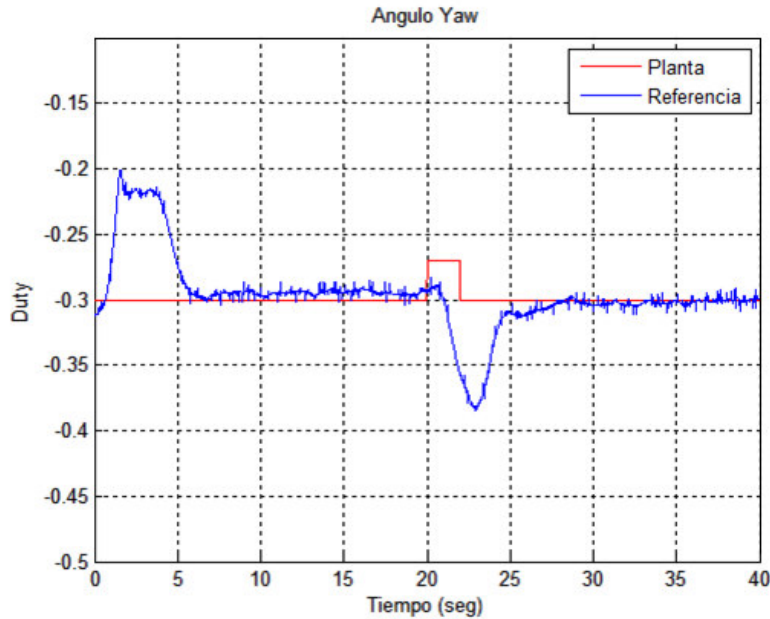


Figura 64: Respuesta del angulo Yaw al seguimiento de una referencia.⁸⁷

Los resultados del PI Vectorial con observador de estado son muy buenos con respecto a dos otros dos comparados, se puede observar el excelente seguimiento del helicóptero a sus respectivas referencias, mostrando tiempos rápidos de estabilización, radicación del error de estado estacionario y el bajo sobre pico en los primeros segundos del ángulo Pitch. De igual forma se puede observar que comparando la respuesta virtual del controlador es muy parecido al físico para Pitch, pero se nota que en Yaw existe un sobre pico de 5 segundos antes de estabilizarse y llegar a la referencia, esto se debe al efecto de coriolis que genera la hélice de Pitch. La variación de la referencia a tipo señal paso en el segundo 20 representa la perturbación que se le aplico al helicóptero DGL, esta permite visualizar el comportamiento del mismo a la acción de control usada, observe que después de la perturbación el controlador vuelve a buscar la referencia de 0.3, esta referencia se seleccionó por que se realizó con respecto al dutty de funcionamiento de los motores; Este comportamiento es el mismo para los otros dos controladores antes evaluados (*SISO Y MIMO*) que se visualizan en las graficas 44, 45, 52, 53.

⁸⁷Fuente: Diseñado y editado por los autores

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Finalizando este trabajo, se visualizan los resultados que mostraron los 3 controladores evaluados en el helicóptero de dos grados de libertad y a su vez se realizó la comparativa de los mismos. A continuación se muestran dos cuadros de resultados, el primero son los datos extraídos de las gráficas de resultados de los tres controladores cuando el sistema se inicializa, busca la estabilidad y el seguimiento a la referencia, el segundo son los resultados del comportamiento del mismo a la perturbación.

1. Dos Controladores PID independientes (SISO).
2. Controlador PID MIMO cruzado por desacople.
3. Controlador PI Vectorial con observador de estado.

Controlador	Grado de libertad	Tiempo Levantamiento (s)	Sobre pico (%)	Estabilización (s)
1	Pitch	6.5	12.5	10.5
	Yaw	1.11	66.66	13.5
2	Pitch	8	6.25	9
	Yaw	1.26	86.36	17
3	Pitch	3.7	8.5	6.5
	Yaw	0.5	61.53	8

Cuadro 17: Resultados entre controladores.⁸⁸

Control	Grado de libertad	Sobre pico (%)	Estabilización (s)
1	Pitch	66.66	7
	Yaw	226.66	9
2	pitch	33	5
	Yaw	300	18
3	pitch	44	6
	Yaw	266.66	8

Cuadro 18: Resultados a la Perturbación.⁸⁹

En el punto de partida, la retroalimentación de estado del control PI Vectorial con observador de estado fue el mejor controlador para el helicóptero de dos grados libertad, en general mostrando resultados de “6,5 segundos en tiempo de estabilización y

⁸⁸Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁸⁹Fuente: Diseñado y editado por los autores

8,5 % de sobre pico para el ángulo Pitch, para el ángulo Yaw 8 segundos en tiempo de estabilización y 61.53 % de sobre pico”, es más eficaz que los otros dos controladores, tiene un tiempo de levantamiento más veloz, tiempo de estabilización y porcentajes de sobre paso más pequeños, en ambos ángulos “Pitch y Yaw”. El control PID SISO independiente obtuvo el segundo puesto como mejor controlador, con “10,5 segundos en tiempo de estabilización y un 12,5 % de sobre pico para Pitch, además 13,5 segundos en el tiempo de estabilización y 66.66 % de sobre pico” para el ángulo de Yaw. Por último el control MIMO cruzado por desacople PID tomo el último lugar con “9 segundos de tiempo de estabilización y un 6,25 % de rebasamiento ”sobre pico” en Pitch, también se obtuvo 17 segundos en el tiempo de estabilización con 86.36 % de sobre pico en el ángulo Yaw”.

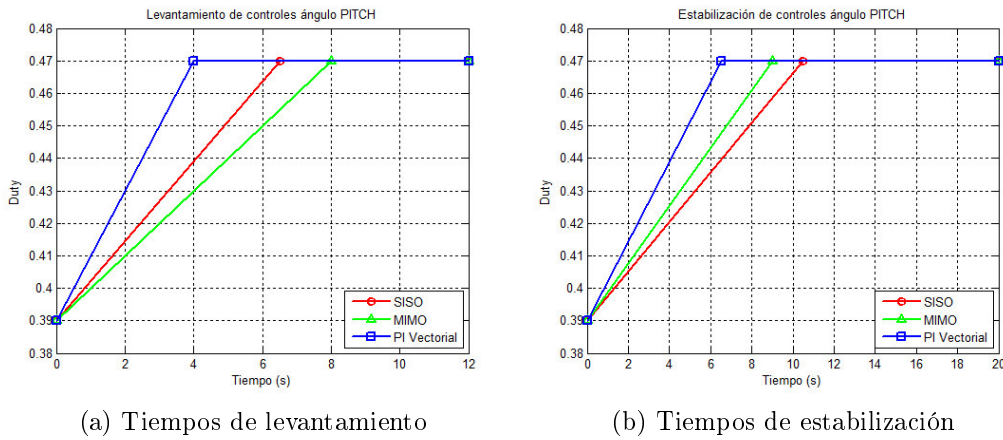


Figura 65: Respuesta de controladores ángulo Pitch.⁹⁰

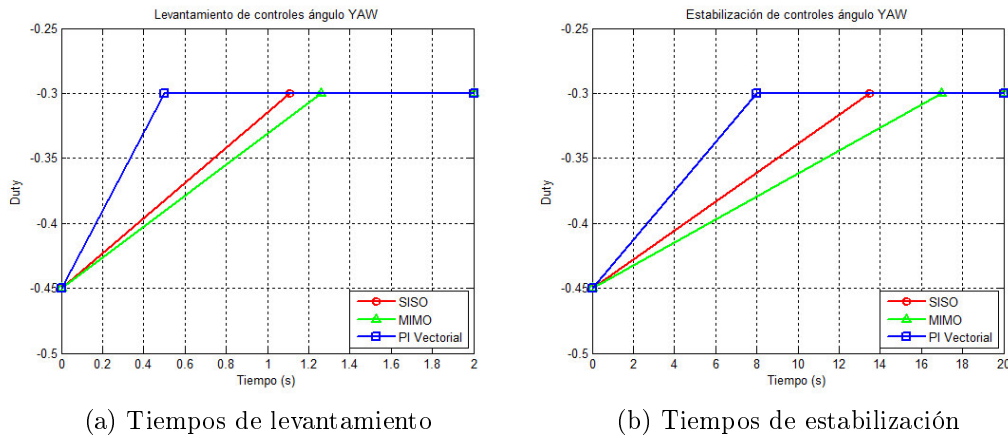


Figura 66: Respuesta de controladores ángulo Yaw.⁹¹

⁹⁰Fuente: Diseñado y editado por los autores

⁹¹Fuente: Diseñado y editado por los autores

Las figuras 65 y 66 muestran gráficamente el comportamiento de los tres controladores en tiempo de levantamiento y de estabilización para los ángulos Pitch y Yaw, se ve claramente que el controlador con mejor resultado es el PI vectorial con observador de estado, el cual se encuentra en azul.

Cuando se trata de la perturbación, el controlador más rápido fue el control MIMO cruzado por desacople PID, pero se tuvo en cuenta que el mejor resultado fue solo para el ángulo de Pitch, en el ángulo Yaw demostró el peor comportamiento de los tres controladores evaluados. El controlador PI Vectorial con observador de estado fue el que mejor se adaptó al sistema controlando ambos ángulos Pitch y Yaw, demostrando resultados de “6 segundos de tiempo de estabilización y 44 % en sobre pico para el ángulo Pitch, en el ángulo Yaw 8 segundos con 266.66 % de sobre pic” , en comparación a los “5 segundos en tiempo de estabilización y 33 % de rebasamiento en Pitch, en Yaw de 18 segundos en tiempo de estabilización con 300 %” de rebasamiento para el control MIMO. Estos resultados son excelentes para el control PI vectorial con observador de estado, dando el hecho de que la retroalimentación de estado con un observador de estado, es un controlador que toma todas las variables del helicóptero de dos grados de libertad y se les relaciona enteramente, dando la certeza de que allí está actuando un control que matemáticamente tiene buen sustento y que es capaz de mostrar buenos resultados para sistemas multivariantes, inestables y no lineales, mostrando al mismo tiempo un control que relaciona completamente la dinámica de todo el sistema.

Se resalta que cuando el helicóptero DGL es perturbado, este alcanza valores de sobre pico elevados en el ángulo Yaw, esto se debe a que el control en Yaw es un poco más lento que el control en Pitch, debido a que este cuenta con una hélice de menor área y por qué el ángulo Pitch al generar mayor propulsión este genera una mayor fuerza de coriolis o transversal; este inconveniente se puede resolver aplicando técnicas de control más avanzadas de optimización como es el Control PI vectorial con observador de estado usando *Linear Quadratic Regulator* (“LQR”) o control por rechazo activo de perturbaciones los cuales podrán ser aplicados al helicóptero DGL en estudios posteriores.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso y se validó la construcción, el modelamiento y el control de un helicóptero de dos grados de libertad, sistema multivariable, inestable y no lineal.

El helicóptero construido demostró confiabilidad, mostrando buenos resultados de funcionamiento, permitiendo visualizar los efectos naturales que rigen al sistema. Para este trabajo se tuvieron que hacer pruebas exhaustivas, lo que permitió dar un buen diagnóstico de funcionamiento.

El modelamiento del sistema usando las ecuaciones diferenciales de lagrange, permitió realizar satisfactoriamente un análisis completo de todo el sistema, donde todas las variables físicas se relacionaron para tener un mayor acercamiento a la planta real y obtener mejores resultados a la hora de ser controlado, demostrando ser un modelamiento ideal para aplicar técnicas de control multivariable en espacio de estados.

Dado a que se aplicaron tres técnicas de control, se pudo llegar a la conclusión que el controlador PI Vectorial con observador de estado es robusto por ser un control que no permite que el sistema no se desestabilice fácilmente y el cual no permite una fácil saturación de la señal de control, dando ventajas en los resultados, comparando las otras dos técnicas de control (*SISO Y MIMO*). Esto permite llegar a la conclusión que dicho controlador fue el mejor en este caso para sistemas de múltiples variables y es apto para aplicarlos en sistemas de cualquier rama de la ingeniería.

En conclusión, se cumplieron con todos los objetivos planteados en este trabajo de grado, demostrando buenos resultados de ejecución en todas las áreas: mecánica, modelado y control. Este trabajo aporta grandes resultados, los cuales podrán usarse en futuros trabajos y aplicaciones ingenieriles, no solo en el campo de la ingeniería mecánica sino también en la aeronáutica.

Por último es preciso mencionar que se deben limitar los rangos de trabajo del módulo de control a 75 grados para Pitch y 180 grados para Yaw, ya que si no es así, se atenta con la estabilidad del sistema, este módulo se diseñó siguiendo los parámetros de una helicóptero real, lo que indica que no está diseñado a seguir referencias extremas.

Bibliografía

- [1] BLAIR. Lagrange's equations. (2003).
- [2] CARO CASTILLO, Andrés; LÓPEZ LEAÑO, Francisco y ORTÍZ PULIDO, José. Control multivariable para un helicóptero de dos grados de libertad utilizando algoritmos genéticos. Bogotá: 2005.
- [3] Teoría de máquinas. Primera edición. Barcelona, España: Editorial CPDA, 2001. p. 33 - 40.
- [4] Movilidad de una aeronave. [en línea]. [Consultado 25 sep. 2014]. Disponible en <<http://www.manualvuelo.com/PBV/PBV15.html>>
- [5] Aerodinamica. [en línea]. [Consultado 20 ago. 2014]. Disponible en <<http://aerodinamicafacil.weebly.com/aerodinaacutemica-en-los-helicoacutepetros.html>>
- [6] MUÑOS, Miguel. SISTEMAS FUNCIONALES. [en línea]. [Consultado 01 ago. 2014]. Disponible en <<http://www.manualvuelo.com/SIF/SIF32.html>> 1
- [7] Leyes de Newton. [en línea]. [Consultado 15 ago. 2014]. Disponible en <http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Leyes_de_Newton.htm>
- [8] Potenciometro lineal. [en línea]. [Consultado 18 ago. 2014]. Disponible en <http://www.uib.cat/depart/dfs/GTE/education/industrial/tec_electronica/teoria/resistores_variables.pdf>
- [9] Inducción a matlab y simulink. [en línea]. [Consultado 22 jul. 2014]. Disponible en <http://www.esi2.us.es/fabio/apuntes_matlab.pdf>
- [10] OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. México: Editorial Pearson, 1998.
- [11] DULHOSTE, Jean. Teoría de Control. p 12-18.
- [12] OSPINA ALARCÓN, Manuel. Diseño de un sistema de control multivariable para un circuito de molienda en húmedo. Medellín: 2009.
- [13] Controlabilidad y observabilidad. [en línea]. [Consultado 28 jun. 2014]. Disponible en <<http://www.ib.cnea.gov.ar/dsc/capitulo6/Capitulo6.htm>>
- [14] Realimentación de estados y observadores. p. 144-193
- [15] Introducción a PWM. [en línea]. [Consultado 03 jul. 2014]. Disponible en <<http://www.arcos.inf.uc3m.es/fostr/lib/exe/fetch.php?media=introduccionpwm.pdf>>

- [16] Máquinas de volar de Leonardo. [en línea]. [Consultado 23 jul. 2014]. Disponible en <<http://faircompanies.com/news/view/maquinas-volar-leonardo-impedimento-non-mi-piega/>>
- [17] Quanser. 2DOF-Helicopter. [en línea]. [Consultado 04 ago. 2014]. Disponible en <http://www.quanser.com/products/2dof_helicopter>
- [18] AHMAD, S; CHIPPERFIELD, A Y TOKHI, M. Dynamic modelling and optimal control of a twin rotor MIMO system. (2000). P. 391 - 398.
- [19] ZARIKIAN, Garo y SERRANI, Andrea. External model-based disturbance rejection in tracking control of Euler-Lagrange systems. (junio, 2005). p. 3562 - 3567.
- [20] CAZZOLATO, Ben. Automatic control II - 2DOF Helicopter, (Septiembre, 2006);p. 1 - 14
- [21] GONZALEZ, A; MAHTANI, R; BEJAR, M y OLLERO, A. Control and stability analysis of an autonomous helicopter. (2005); p. 399 - 404.
- [22] RUIZ SOTO, Arely. Construcción y control de una planta didáctica de dos grados de libertad. Veracruz: 2009.
- [23] PEREZ, Claudia; MEDINA, Wilfredis; FERMIN, Leon; BOGADO, Juan; TORREALBA, Rafael y FERNÁNDEZ, Gerardo. Generalized bilateral MIMO control by states convergence with time delay and application for the teleoperation of 2-DOF helicopte. (mayo, 2010). p. 5328 - 5333.
- [24] POTIRANGSIYAGON, Tewet y RUANGWISSET, Annop. Improvement of PD Pitching Angle Control of Helicopter in the Wind by variable P Control Gain, (septiembre, 2011); p. 1019 - 1023.
- [25] DICESARE, Antonio; GUSTAFSON, Kyle y LINDENFELZER, Paul. Design optimization of a quad - rotor capable of autonomous flight.
- [26] Industrias JQ. Polipropileno datos tecnicos. [en línea]. [Consultado 04 jul. 2014]. Disponible en <<http://www.jq.com.ar/Imagenes/Productos/Polipropileno/PoliProp/dtecnicos.htm>>
- [27] BUDYNAS, richard y NISBETT, keith. Diseño en ingeniería mecánica de Shigley. Octava edición. Bogotá, Colombia: Editorial MC Graw Hill. s.f.
- [28] NTN Revolución en movimiento. Rodamientos de NTN. [en línea]. [Consultado 15 jul 2014]. Disponible en <<http://www.ntnamericas.com/es/productos/busqueda-de-rodamiento/resultados-de-busqueda-de-rodamiento/datasheet?pid=78442cid=RBSRDctc=B>>

- [29] SMITH, Carlos y CORRIPIO, Armando. Control automático de procesos. Primera edición. México: Editorial limusa, S.A., 1991. p. 225 - 411.
- [30] DOYLE, John; FRANCIS, Bruce y TANNENBAUM, Allen. Feedback control theory. Primera edición. Macmillan publishing, 1990. p. 117- 160.
- [31] RAMALAKSHMI, A y MANOHARAN, P. Non-linear Modeling and PID Control of Twin Rotor MIMO System. (agosto, 2012); p. 366 - 369.
- [32] DIAZ, Hernando. Fundamentos de control. Diseño con variables de estado. p. 117-146
- [33] AHMED, B; BHATTI, A; IQBAL, I y KAZMI, I. Two-Sliding Mode Based Robust Control for 2-DOF Helicopter. (2010).
- [34] KOPKA, Helmut y DALY, Patrick. A guide to latex and electronic publishing. Cuarta edición. Edinburgo: Addison Wesley, 2004.

7. ANEXOS

El código que se realizó para el controlador PI Vectorial se muestra a continuación para que puedan ser evaluados y estudiados por los lectores de este trabajo.

$$m1 = 1.6$$

$$m2 = 1.4$$

$$d1 = 0.2$$

$$d2 = 0.2$$

$$b1 = 0.8$$

$$b2 = 0.8$$

$$X1 = -59$$

$$IT = 128.27 * 10^{-3}$$

Ecuaciones obtenidas por medio de las ecuaciones diferenciales de lagrange.

$$a = (-b1)/(m1 * d^2 + m2 * d^2 + IT)$$

$$b = (d^2 * m1 * (\cos d(X1)^2) * \sin d(X1) - d^2 * m2 * (\cos d(X1)^2) * \sin d(X1))/(m1 * d^2 + m2 * d^2 + IT)$$

$$c = (-b1)/(d^2 * m1 * (\cos d(X1)^2) + d^2 * m2 * (\cos d(X1)^2) + IT)$$

Matrices (A B C D) linealizadas

$$A = [0100; \dots 0a0b; \dots 0001; \dots 000c]$$

$$B = [00; 10; 00; 01]$$

$$C = [1000; 0010]$$

$$D = [00; 00]$$

$$sys = ss(A, B, C, D)$$

$$[NUM1, DEN1] = ss2tf(A, B, C, D, 1)$$

$$[NUM2, DEN2] = ss2tf(A, B, C, D, 2)$$

Observabilidad del sistema

$$Q = obsv(sys);$$

$$unob = length(A) - rank(Q)$$

Controlabilidad del sistema

$$Co = ctrb(sys);$$

$$unco = length(A) - rank(Co)$$

Control

```

polosPI = 0.0688 * [-27 - 26 - 25 - 23 - 24 - 27]
AA = [A[00; 00; 00; 00]; -Czeros(2)]
BB = [B; zeros(2)]
KPI = place(AA, -BB, polosPI)
K1 = KPI(:, 1 : 4)
K2 = KPI(:, 5 : 6)

```

Estimador

```

polosL = 0.283 * [-55 - 57 - 54 - 56]
L = place(A', C', polosL)'

```

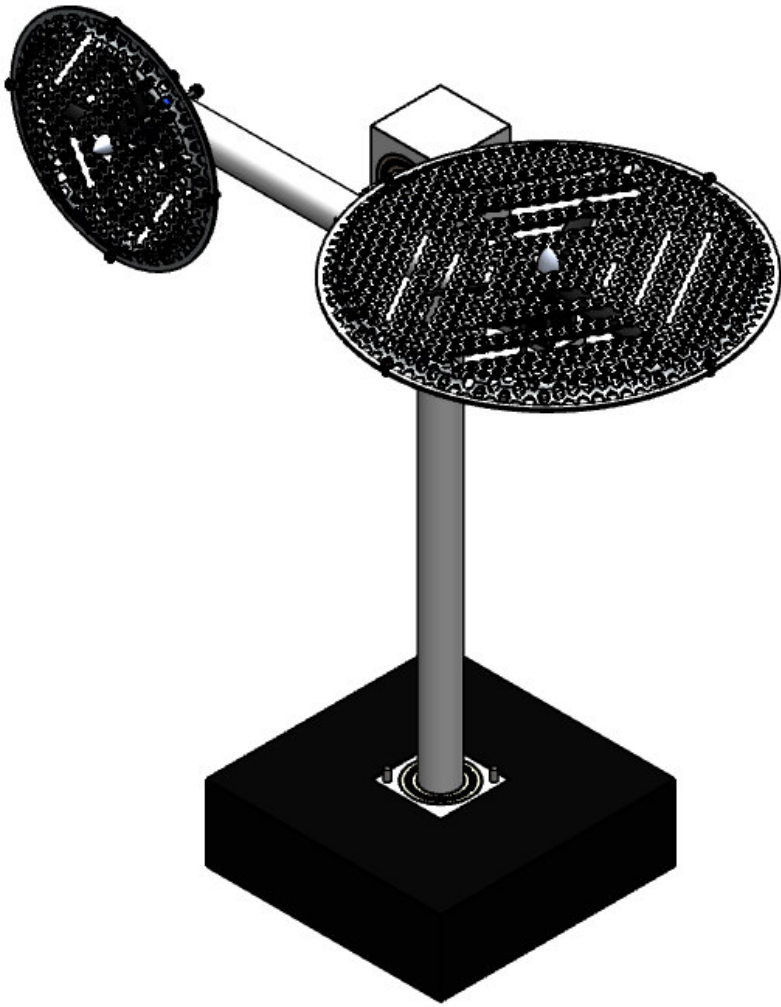
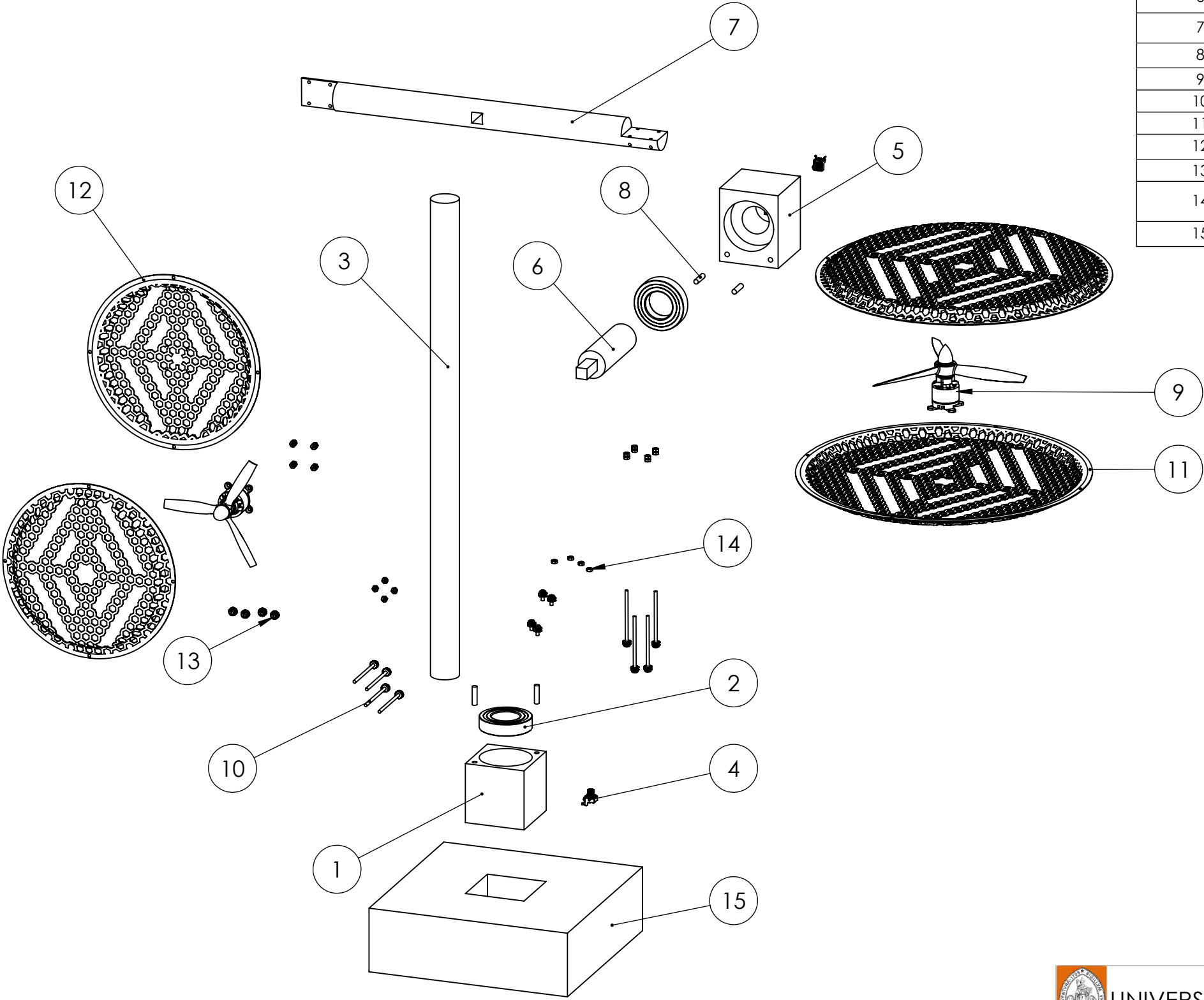
Control Observador

```

Ac = [A + B * K1 - L * C, B * K2; [0000; 0000], [00; 00]]
Bc = [L, [00; 00; 00; 00]; -eye(2), eye(2)]
Cc = KPI
Dc = [0000; 0000]
sysc = ss(Ac, Bc, Cc, Dc)

```

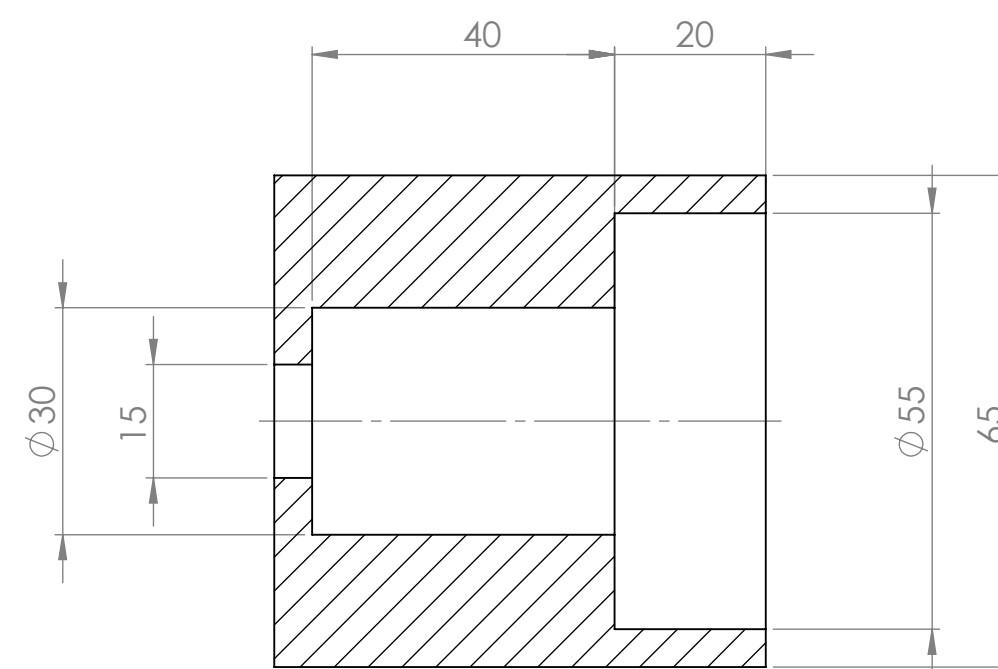
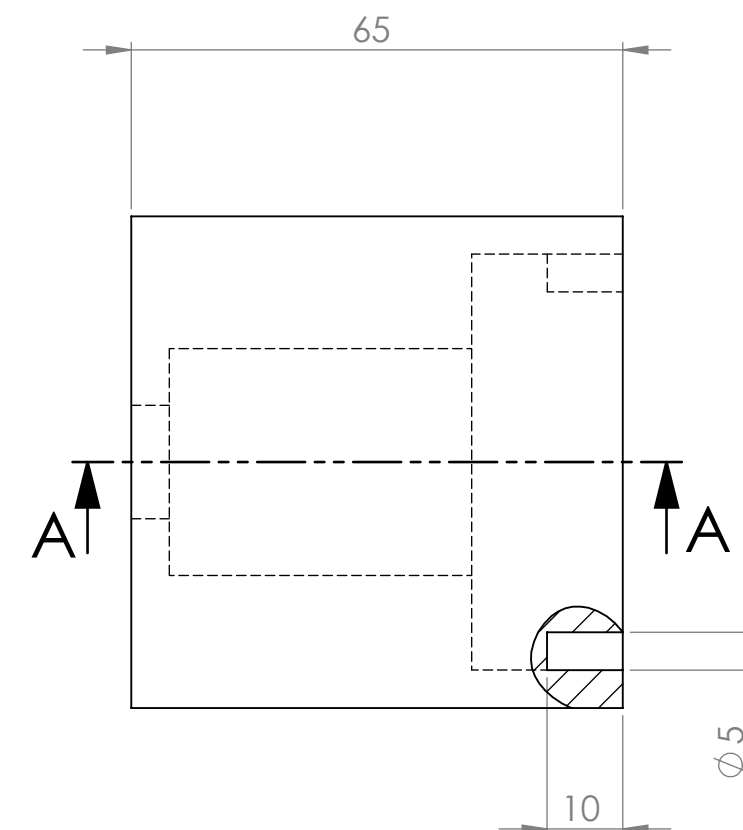
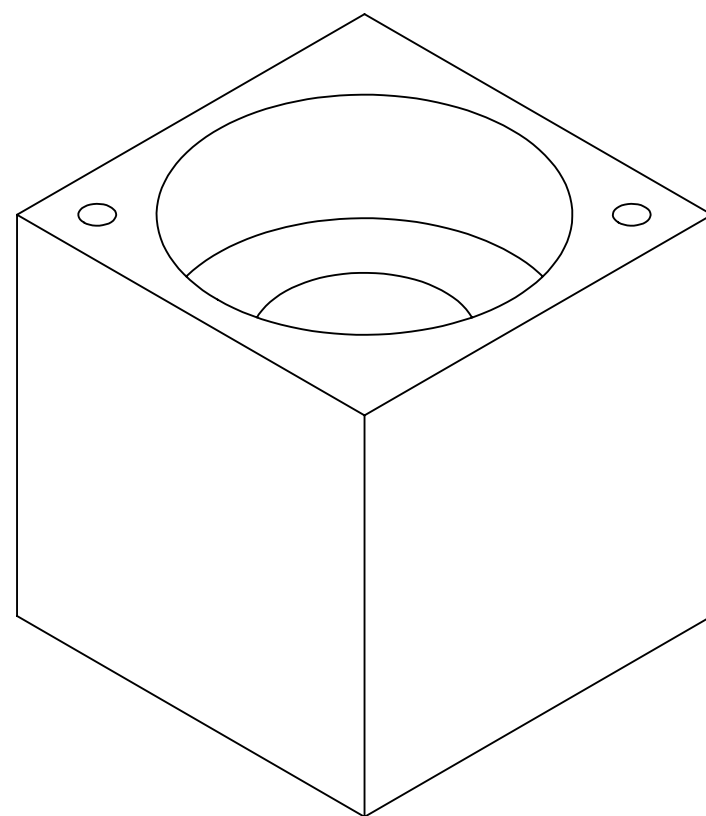
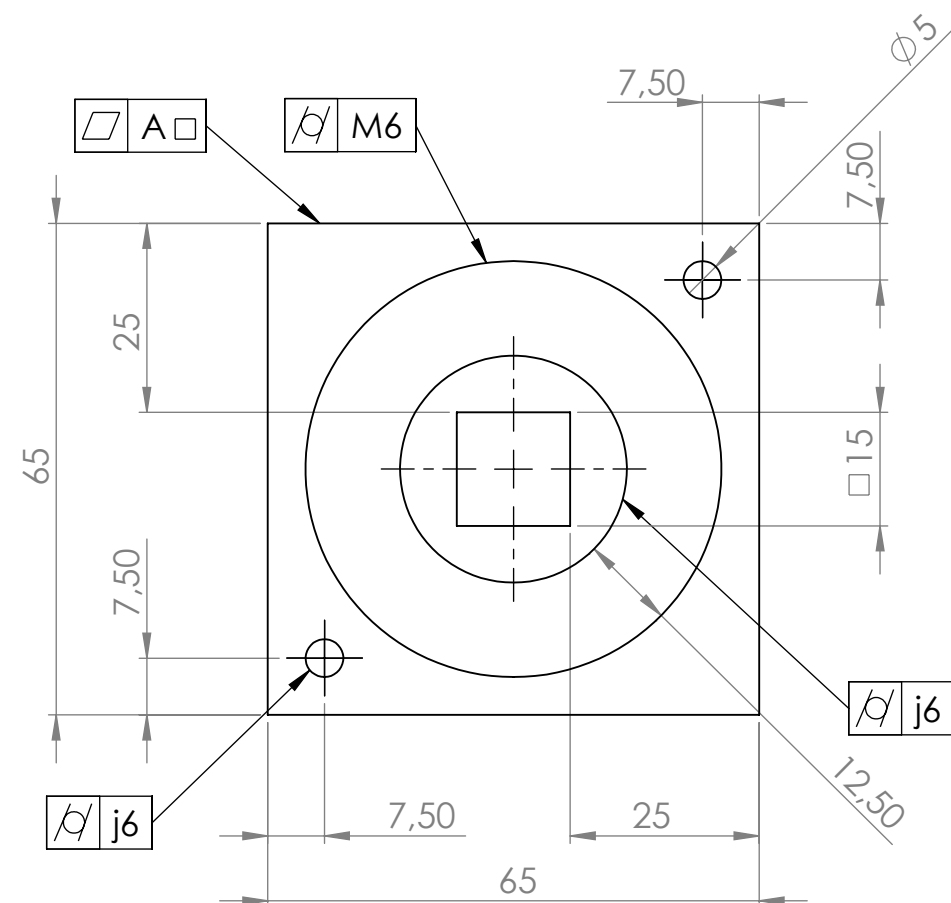
N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	MATERIAL	CANTIDAD
1	Cubo inferior	Polipropileno PP	1
2	Rodamiento 30mm SKF 6006ZC3	Varios	2
3	Columna principal	Polipropileno PP	1
4	Potenciometro lineal	Varios	2
5	Cubo Superior	Polipropileno PP	1
6	Viga unión T	Polipropileno PP	1
7	Viga principal	Polipropileno PP	1
8	Topes	Acero AISI 1020	5
9	Motor - Helice	Varios	2
10	Tornillo M3x65	Acero al carbono	8
11	Protector Grande	Acero al carbono	2
12	Protector Pequeño	Acero al carbono	2
13	Tornillo M3x5	Acero al carbono	8
14	Tuerca Hexagonal nut ISO 4032 (DIN 934) - M3	Acero al carbono	24
15	Caja C90	Acero al carbono	1



UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

Si no se avisa lo contrario:
Las cotas se indican en mm

Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Explosionado	
Material: Varios	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S		
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA 1:5	A3	Plano: 1 de 7



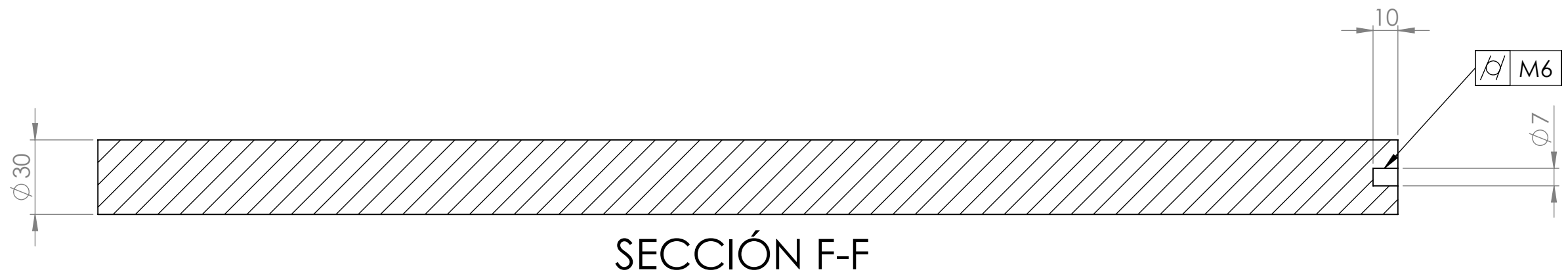
SECCIÓN A-A



UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

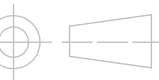
Si no se avisa lo contrario:
Las cotas se indican en mm

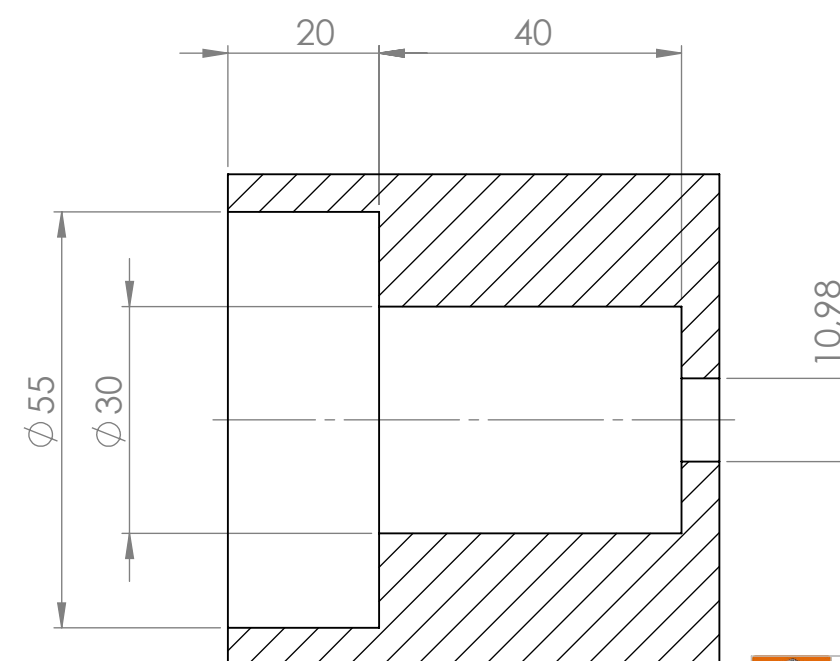
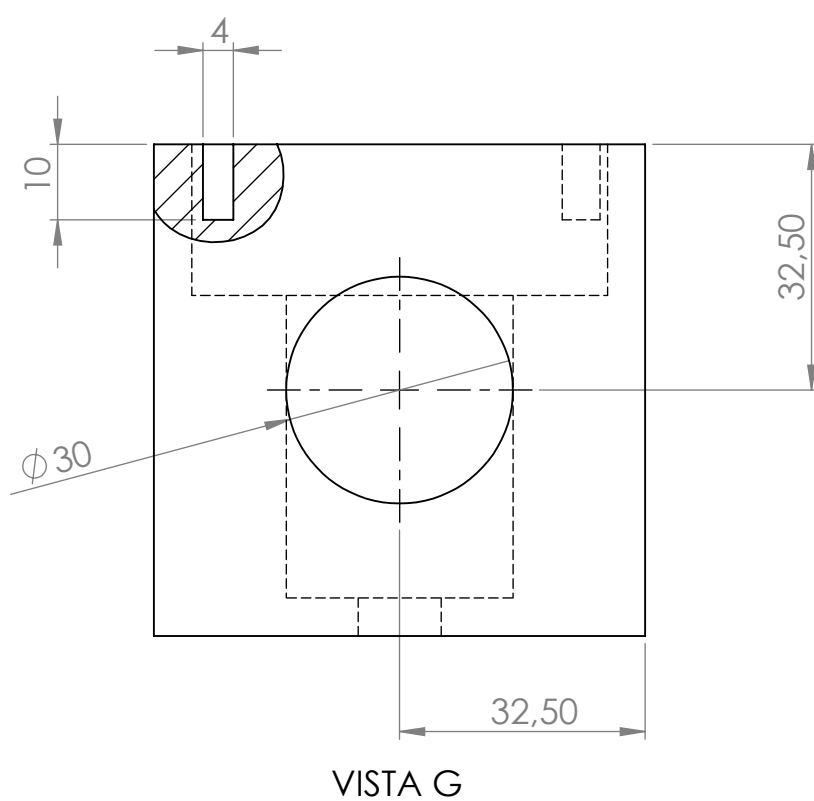
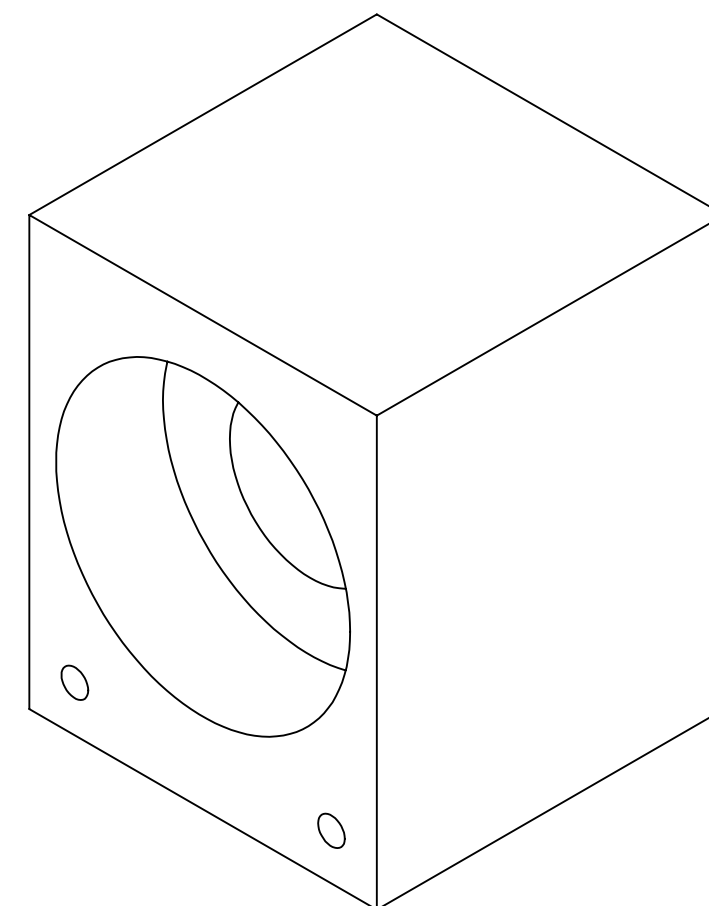
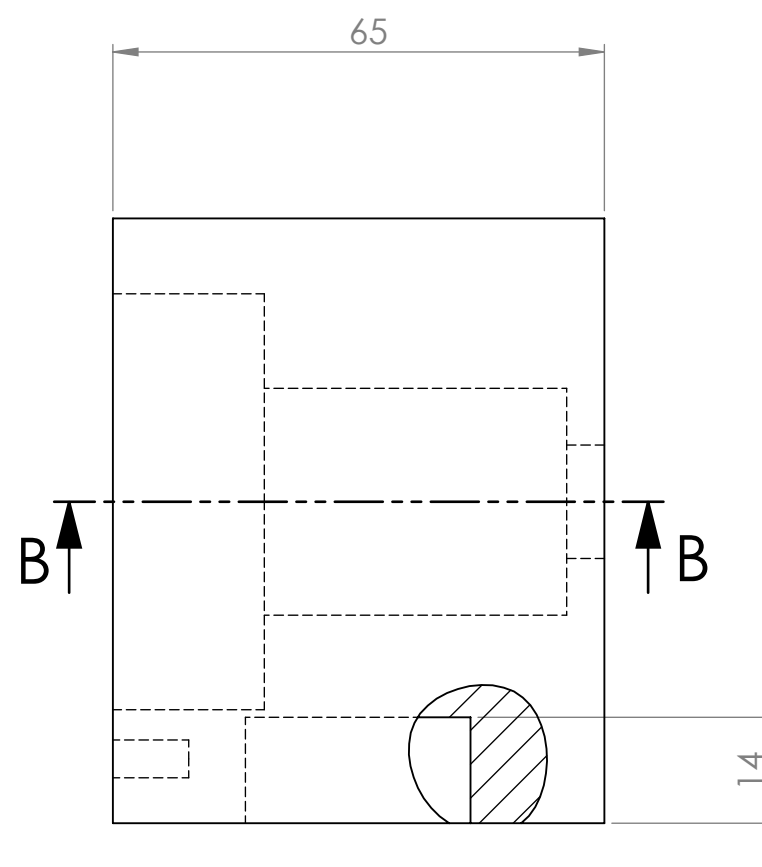
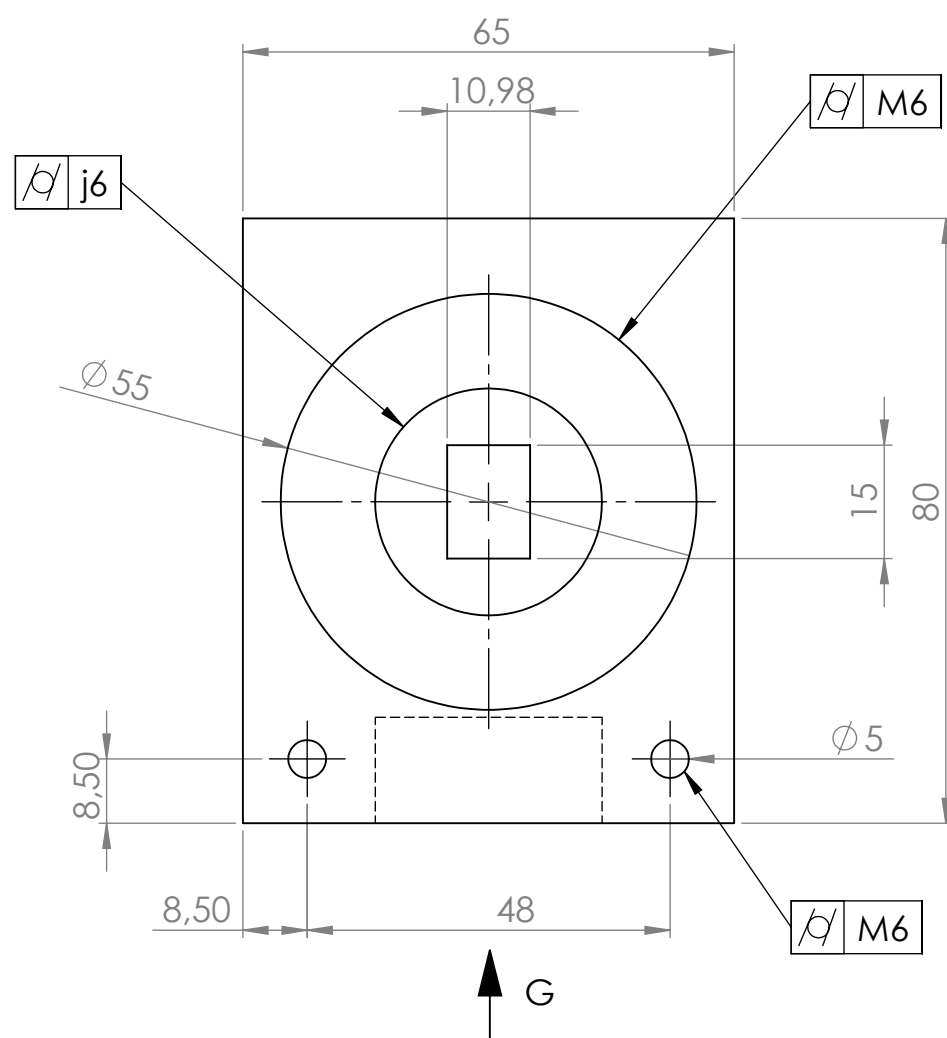
Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Cubo inferior	
Material: Polipropileno PP	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S		
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA:1:1	A3	Plano 2 de 7



UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

Si no se avisa lo contrario:
Las cotas se indican en mm

Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Columna principal
Material: Polipropileno PP	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S	
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA 1: 2	A3 Plano 3 de 7



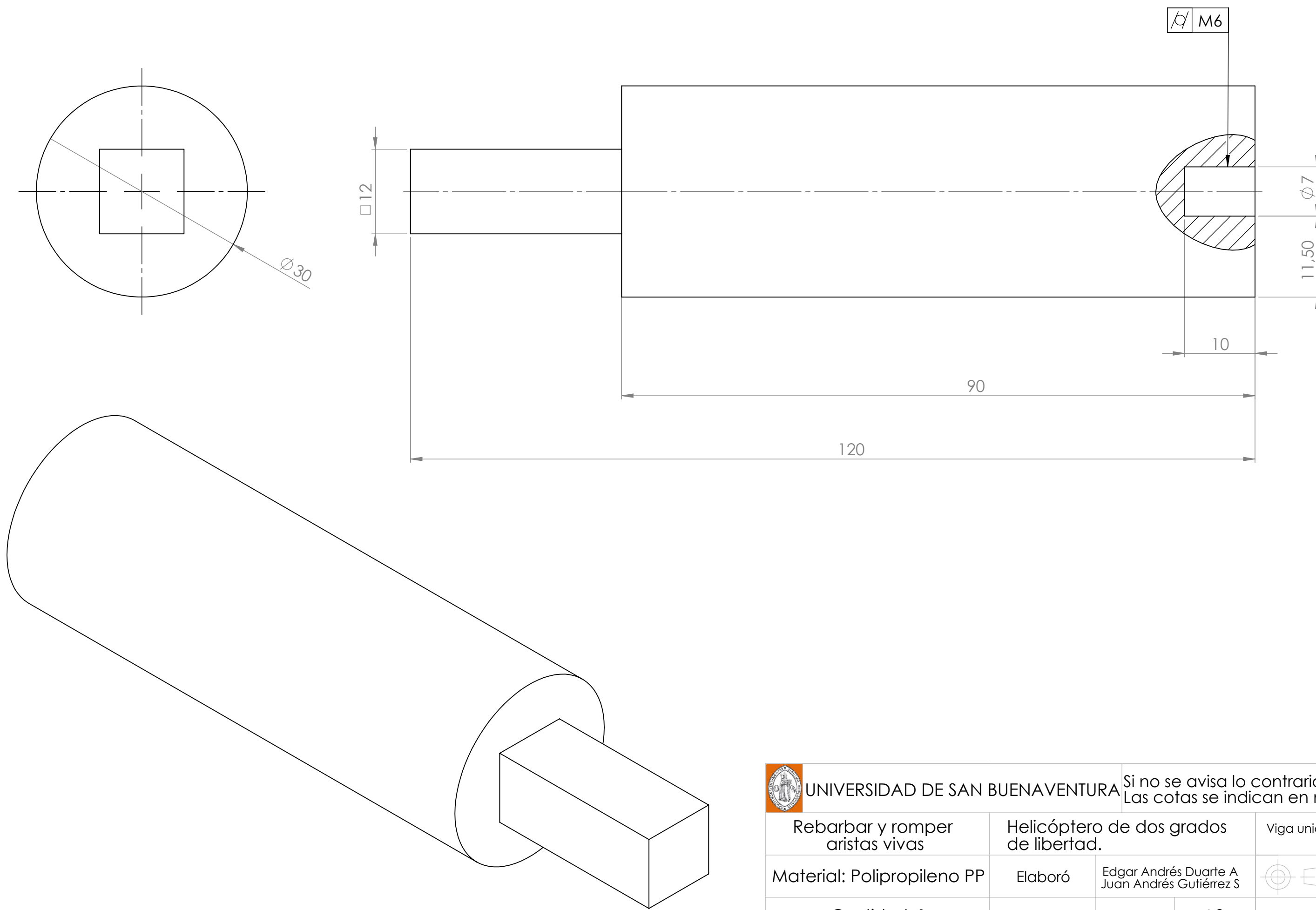
SECCIÓN B-B

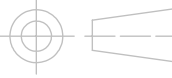


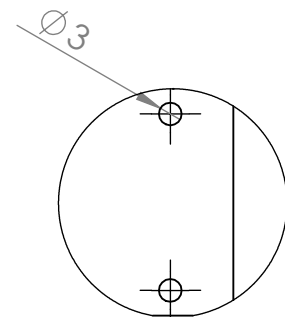
UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

Si no se indica lo contrario:
Las cotas se indican en mm

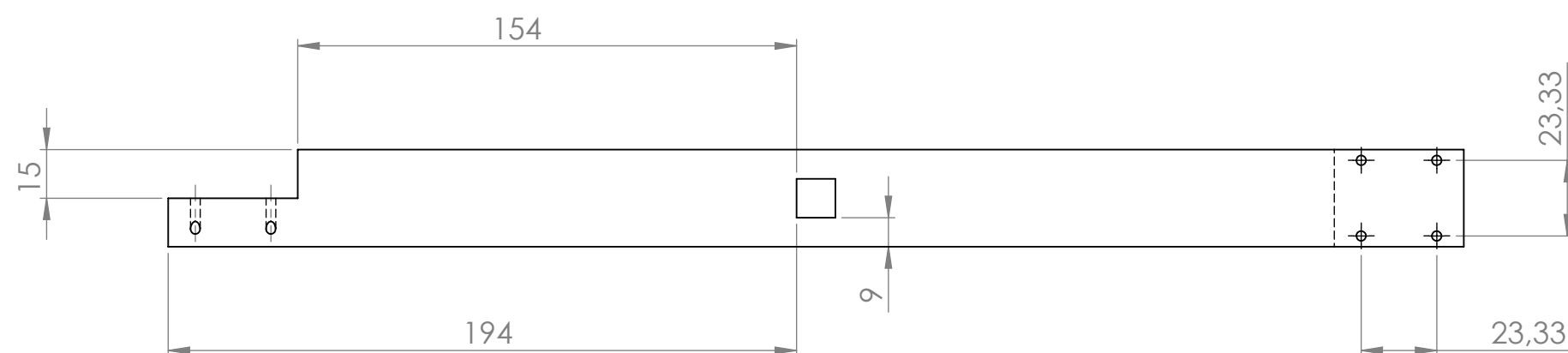
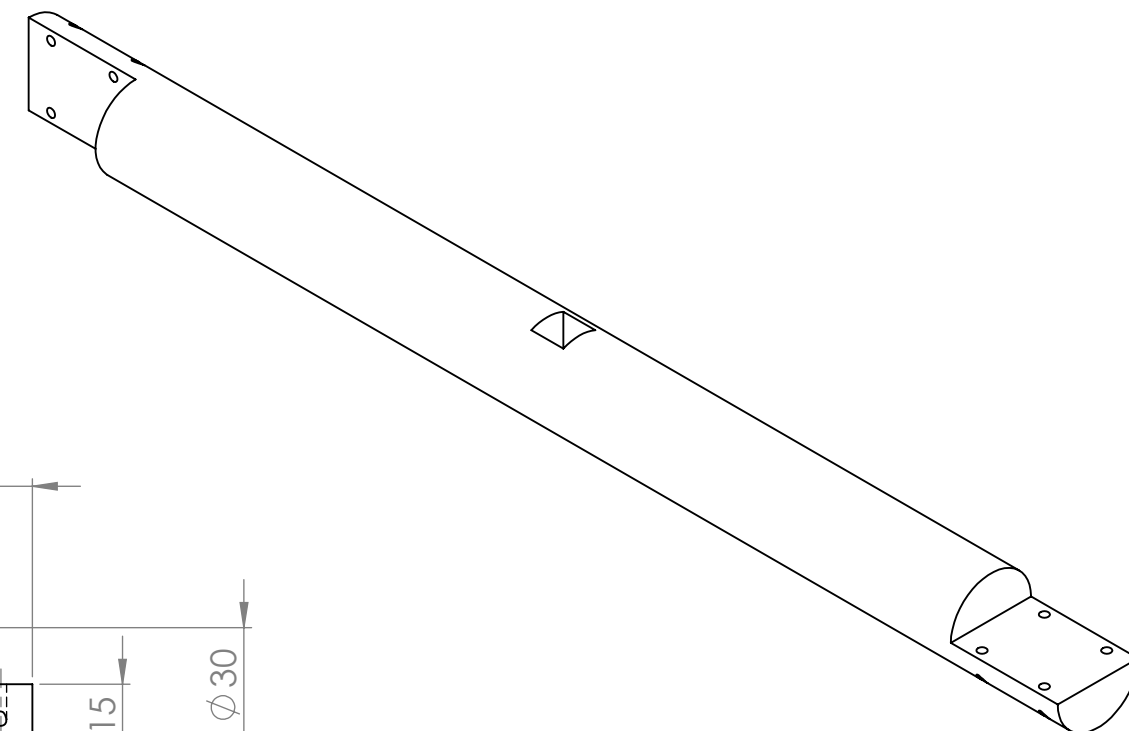
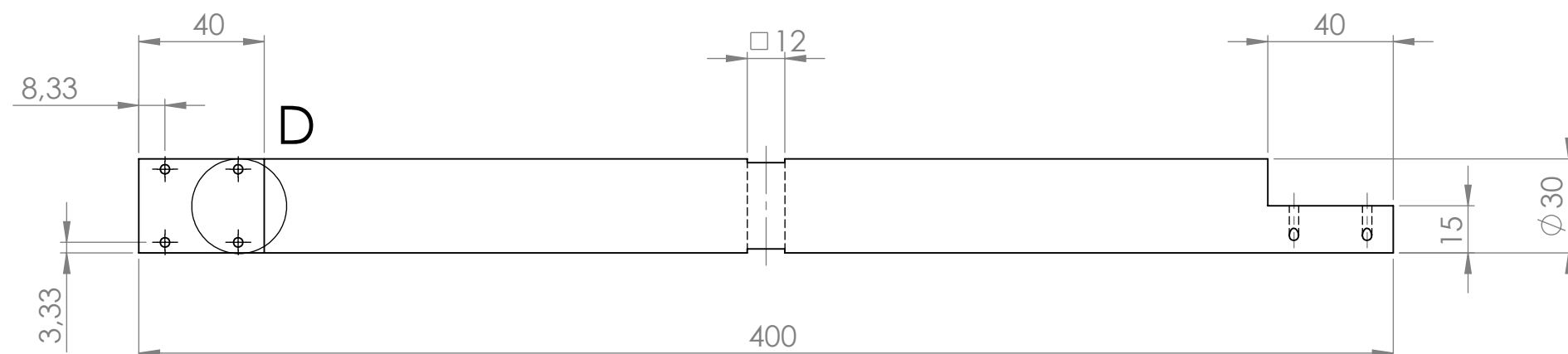
Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Cubo Superior	
Material: Polipropileno PP	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S		
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA:1:1	A3	Plano 4 de 7



 UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA		Si no se avisa lo contrario: Las cotas se indican en mm		
Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Viga unión T	
Material: Polipropileno PP	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S		
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA 2:1	A3	Plano 5 de 7



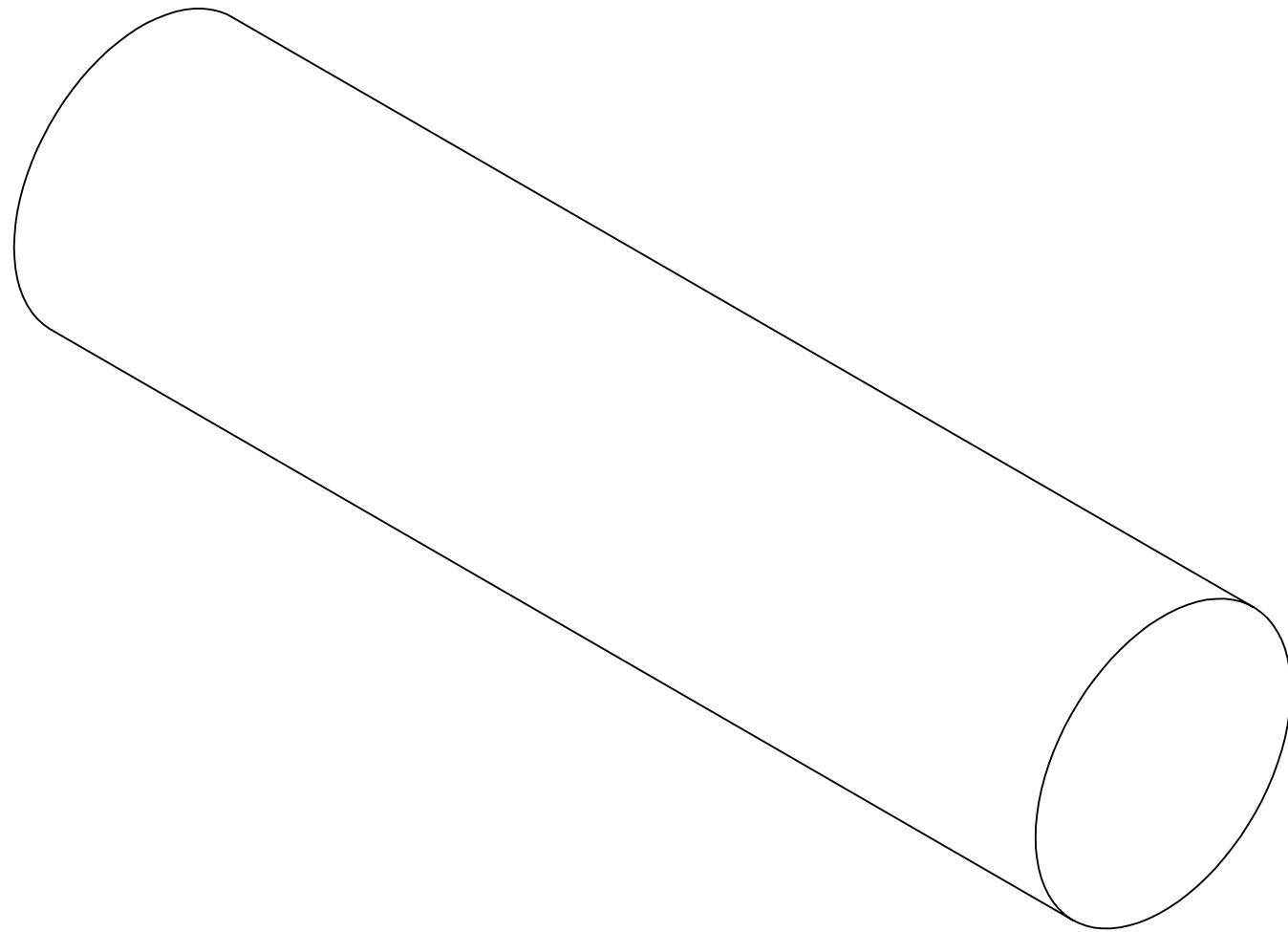
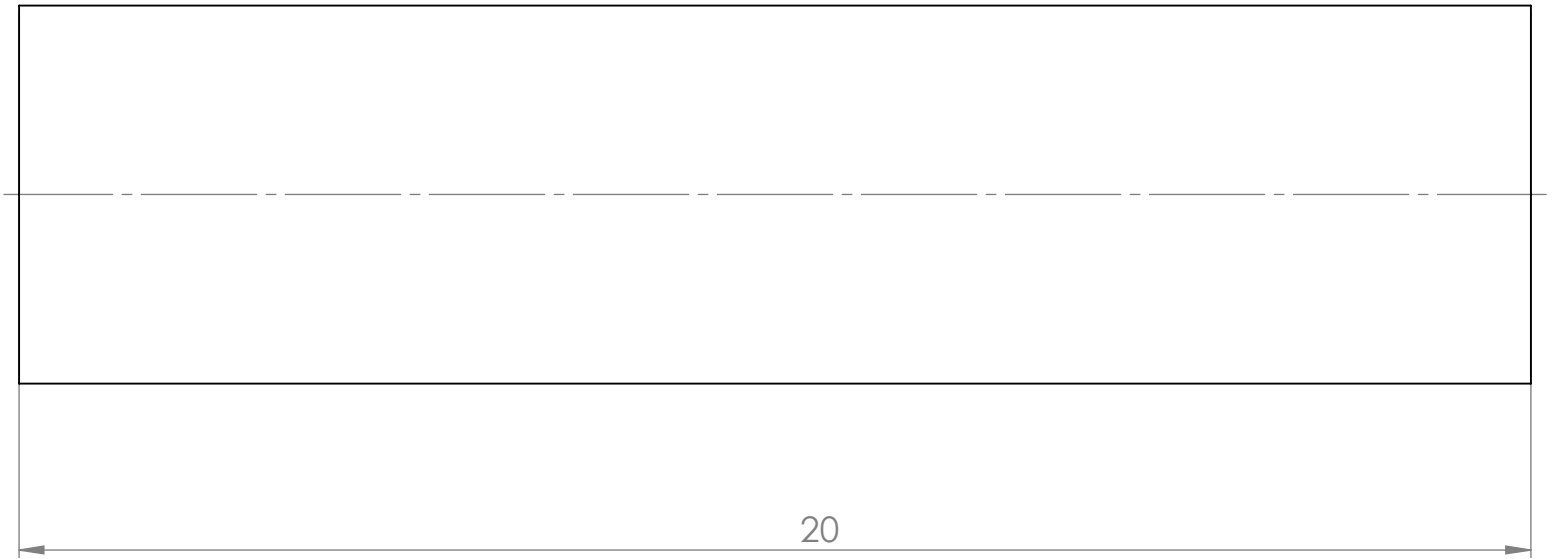
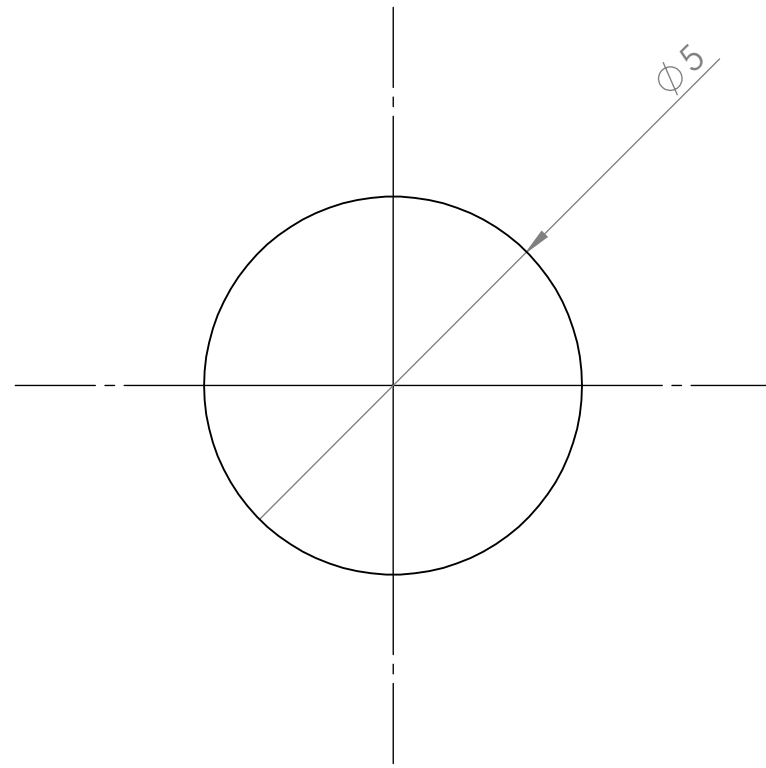
DETALLE D

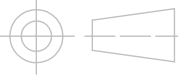


UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

Si no se avisa lo contrario:
Las cotas se indican en mm

Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Viga Principal
Material: Polipropileno PP	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S	
Cantidad: 1	28/10/2014	ESCALA 1: 2	A3 Plano 6 de 7



 UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA		Si no se avisa lo contrario: Las cotas se indican en mm		
Rebarbar y romper aristas vivas	Helicóptero de dos grados de libertad.		Topes	
Material: Acero AISI 1020	Elaboró	Edgar Andrés Duarte A Juan Andrés Gutiérrez S		
Cantidad: 5	28/10/2014	ESCALA 10 : 1	A3	Plano 7 de 7