

RAE

1. TIPO DE DOCUMENTO: Trabajo de grado para optar por el título de INGENIERO AERONÁUTICO

2. TÍTULO: ELABORACIÓN DE UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS DE DEFORMACIÓN POR UNA CARGA NORMAL APLICADA A UNA PLACA EN MATERIAL COMPUESTO TIPO SÁNDWICH

3. AUTORES: Daniela Sacristán Moncayo

4. LUGAR: Bogotá, D.C.

5. FECHA: junio de 2018.

6. PALABRAS CLAVE: Material compuesto, lámina, laminado, sándwich, deformación, diferencias finitas, MATLAB, ANSYS, pandeo, carga normal, placa plana.

7. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO: Este trabajo de grado expone la elaboración, funcionamiento y validación de ARCUM (Aplicación para la Resolución de Casos de deformación en el Uso de Materiales compuestos), una herramienta computacional capaz de determinar el comportamiento de una placa plana de material compuesto sometida a una carga normal de tipo puntual o distribuida; a partir del método de diferencias finitas, el cual, al definir una malla gruesa, media o fina, permite realizar análisis de deformación en puntos específicos de la placa y predecir su condición final, facilitando la ejecución de los modelos iterativos que éstos análisis poseen.

8. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN: El campo temático de este proyecto de investigación es el de Estructuras y materiales, pertenecientes a la sub-línea de la facultad de Control de procesos e instrumentación incluida en la línea de investigación de Tecnologías actuales y sociedades de la Universidad de san Buenaventura.

9. METODOLOGÍA: Este trabajo de grado se realizó con un enfoque empírico-analítico, utilizando tanto los modelos matemáticos propuestos en las fuentes consultadas previamente mencionadas como las relaciones de Poisson y módulos longitudinales y cortantes de los materiales compuestos de matriz polimérica ya caracterizados.

10. CONCLUSIONES: (1) El porcentaje de error entre los valores calculados por ARCUM y los valores de referencia proporcionados por ANSYS no superan el 5 % (2) El modelo utilizado por los autores de la Universidad de San Buenaventura para llevar a cabo el análisis de pandeo por medio del método de diferencias finitas posee errores de simplificación de los coeficientes de ésta (3) En la comparación realizada entre las propiedades mecánicas calculadas por ARCUM y las de referencia tomadas de la bibliografía (Gay et al., 2003), se evidenció que el módulo de Young y la relación de Poisson poseen el mayor y menor error dentro de los parámetros comparados, respectivamente. Asimismo, los resultados de esfuerzo y deformación máximos tienden a estar por debajo del valor real, indicando una posible visualización de falla antes de tiempo, evitando utilizar materiales que se encuentren al límite de su resistencia. (4) Se identificó que el caso de carga que invierte menos tiempo en determinar el vector deformación es el de carga puntual, utilizando entre 431 y 485 segundos que equivalen a 7.1 y 8 minutos respectivamente, a diferencia del caso de carga distribuida en donde la inversión de tiempo es entre 505 y 522 segundos, que equivalen a 8.4 y 8.7 minutos.

ELABORACIÓN DE UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS DE
DEFORMACIÓN POR UNA CARGA NORMAL APLICADA A UNA PLACA EN
MATERIAL COMPUESTO TIPO SÁNDWICH

DANIELA SACRISTAN MONCAYO

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA SEDE BOGOTÁ

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA AERONÁUTICA

BOGOTÁ D.C.

2018

ELABORACIÓN DE UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS DE
DEFORMACIÓN POR UNA CARGA NORMAL APLICADA A UNA PLACA EN
MATERIAL COMPUESTO TIPO SÁNDWICH

DANIELA SACRISTAN MONCAYO

Proyecto grado presentado para optar al título de INGENIERO AERONÁUTICO

Director

Ing. DANIEL AGUDELO NOREÑA. MSc.

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA

BOGOTÁ D.C.

2018

Nota de aceptación

Firma Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C., junio de 2018

Agradecimientos y dedicatoria

A Wilson y Stella, mis padres, por ser la fuente inagotable de paciencia y comprensión, por hacer de mí la mujer de la que hoy estoy orgullosa de ser y por ser el vivo ejemplo del trabajo y esfuerzo que tanto admiro.

A Alejandro, mi hermano, por tener la capacidad de hacerme feliz con solo existir.

A Carlos Felipe por ser el mejor hombre, amigo, colega y compañero de vida desde hace cuatro años, al enseñarme, corregirme, inspirarme y apoyarme incondicionalmente.

A los ingenieros Daniel Agudelo, por su ayuda y tiempo invertido en este proyecto, y Jorge E. Gaitán por ser un excelente maestro y amigo.

Finalmente, agradezco a Dios por dirigir mi camino hacia lo que, sin saberlo, me haría feliz en el futuro.

Tabla de contenido

Lista de figuras.....	7
Lista de símbolos y variables	10
Introducción.....	13
1. Planteamiento del problema.....	14
1.1. Antecedentes.....	14
1.1.1. Nacional/local	14
1.1.2. Internacional	18
1.2. Descripción y formulación del problema	23
1.3. Justificación.....	24
1.4. Objetivos de la investigación	25
1.4.1. Objetivo general.....	25
1.4.2. Objetivos específicos	26
1.5. Alcances y limitaciones	26
1.5.1. Alcances	26
1.5.2. Limitaciones	27
2. Marco de referencia.....	29
2.1. Marco teórico y conceptual.....	29
2.1.1. Materiales compuestos	29
2.1.2. Tipos de análisis de materiales compuestos	33
2.1.3. Teoría de placas	35
2.1.4. Métodos numéricos	36
2.1.5. Recursos computacionales	39
2.2. Marco legal o normativo.....	39
3. Metodología.....	41

3.1.	Enfoque de la investigación	41
3.2.	Línea de investigación de USB/ Sub-línea de facultad/ Campo temático del programa..	41
3.3.	Desarrollo de la metodología	41
4.	Desarrollo de ingeniería.....	44
4.1.	Proyecto ARCUM.....	44
4.1.1.	Disposición general	44
4.1.2.	Estructura lógica	47
5.	Análisis de resultados	78
5.1.	Verificación de casos de carga	78
5.1.1.	Caso de carga puntual.....	79
5.1.2.	Caso de carga distribuida	83
5.1.3.	Caso de carga parcialmente distribuida.....	88
5.2.	Verificación de casos de la bibliografía	91
5.2.1.	Universidad de San Buenaventura Sede Bogotá.....	92
5.2.2.	Universidad Carlos III de Madrid	95
6.	Conclusiones.....	98
7.	Recomendaciones.....	100
	Bibliografía.....	102

Lista de figuras

Figura 1 a) Dimensiones de la placa de estudio b) Malla utilizada para el análisis de pandeo	15
Figura 2 Módulo de las propiedades de diseño para el software	17
Figura 3 Módulo de diseño de laminado	18
Figura 4 Configuraciones de placas en la ventana inicial de BENSYS dirigido	19
Figura 5 a) Módulo para el modelado de la placa y modificación del material b) Ventana de resultados de BENSYS	20
Figura 6 Carga puntual aplicada en el centroide de la placa plana	21
Figura 7 Carga rectangular aplicada transversalmente en la placa	22
Figura 8 Carga triangular q aplicada transversalmente en la placa	23
Figura 9 Esquema de una fibra bidireccional en forma de tejido plano	30
Figura 10 Esquema de un laminado	31
Figura 11 Nomenclatura de una estructura tipo sándwich	32
Figura 12 Sistema de referencia del material compuesto	34
Figura 13 Transformación de ejes de acuerdo con el ángulo de orientación de la fibra.....	35
Figura 14 Cargas y momentos flectores presentes en el estado flexional de la placa	36
Figura 15 Metodología del proyecto de grado	42
Figura 16 Diagrama de casos de diseño	45
Figura 17 Diagrama de flujo para la selección de casos de diseño en ARCUM.....	47
Figura 18 Diagrama de flujo del módulo de diseño de compuesto ejecutado por ARCUM.....	48
Figura 19 Variación del módulo longitudinal y transversal en función del ángulo de orientación de las fibras	54
Figura 20 Variación de la relación de Poisson mayor y menor en función del ángulo de orientación de las fibras	55
Figura 21 Variación del módulo cortante en función del ángulo de orientación de las fibras	56
Figura 22 Esquema de referencia de un laminado	59
Figura 23 Diagrama de flujo para el módulo de modelado de la placa ejecutado por ARCUM..	62
Figura 24 Esquemas de las mallas disponibles en ARCUM. a) Fina b) Media c) Gruesa	63
Figura 25 Secuencia para el ingreso de los nodos que describen la zona de carga distribuida	67
Figura 26 Diagrama de flujo para el módulo de resultados ejecutado por ARCUM	68
Figura 27 Estructura para la evaluación de coeficientes por nodo	69

Figura 28 Condiciones de los nodos de acuerdo con su posición en la placa.....	71
Figura 29 Gráfica de convergencia de la solución, graficada en el módulo de resultados.	72
Figura 30 Gráfica en tres dimensiones de la deformación de la placa evaluada. ARCUM	73
Figura 31 Gráfica de esfuerzo contra deformación graficada en el módulo de resultados.	75
Figura 32 Diseño de lámina del caso de carga puntual.....	80
Figura 33 Diseño de laminado del caso de carga puntual.....	81
Figura 34 Modelado de la placa del caso de carga puntual.....	81
Figura 35 Resultados del caso de carga puntual	82
Figura 36 Deformación de la placa del caso de carga puntual en ANSYS	83
Figura 37 Diseño de lámina del caso de carga distribuida.....	84
Figura 38 Diseño de laminado del caso de carga distribuida	85
Figura 39 Modelado de la placa del caso de carga distribuida	86
Figura 40 Resultados del caso de carga distribuida.....	87
Figura 41 Deformación de la placa del caso de carga distribuida en ANSYS	87
Figura 42 Diseño de lámina del caso de carga parcialmente distribuida.....	88
Figura 43 Modelado de la placa del caso de carga parcialmente distribuida.....	90
Figura 44 Resultados del caso de carga parcialmente distribuida	90
Figura 45 Deformación de la placa del caso de carga parcialmente distribuida en ANSYS	91
Figura 46 Modelado de la placa del caso de la Universidad de San Buenaventura	92
Figura 47 Resultados de deformación obtenidos en el estudio de la Universidad de San Buenaventura	93
Figura 48 Resultados del caso de la Universidad de San Buenaventura en ARCUM.....	93
Figura 49 Deformación de la placa del caso de la Universidad de San Buenaventura en ANSYS.	94
Figura 50 Modelado de la placa del caso de la Universidad Carlos III de Madrid	95
Figura 51 Resultados del caso de la Universidad Carlos III de Madrid.....	96
Figura 52 Deformación de la placa caso de la Universidad Carlos III de Madrid en ANSYS	96

Lista de tablas

Tabla 1 Propiedades mecánicas de fibras y matrices para el diseño de una lámina	49
Tabla 2 Variación de expresiones matemáticas de acuerdo con el formato aplicable para cada caso	64
Tabla 3 Modificaciones de la ecuación general de diferencias finitas de acuerdo con la posición del nodo	71
Tabla 4 Conjunto de ecuaciones para la determinación del esfuerzo último de láminas y laminados.....	75
Tabla 5 Conjunto de ecuaciones para la determinación del espesor mínimo requerido para la carga aplicada	76
Tabla 6 Comparación de constantes elásticas del caso de carga puntual	80
Tabla 7 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga puntual	83
Tabla 8 Comparación de constantes elásticas del caso de carga distribuida.	84
Tabla 9 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga distribuida	88
Tabla 10 Comparación de constantes elásticas del caso de carga parcialmente distribuida.	89
Tabla 11 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga parcialmente distribuida	91
Tabla 12 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de la de la Universidad de San Buenaventura	94
Tabla 13 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de la de la Universidad Carlos III de Madrid.....	97

Lista de símbolos y variables

Concepto	Símbolos	Variable en el algoritmo	Unidades
Relación de aspecto de un elemento de la malla	α	alp	-
Tamaño de un elemento de la malla en dirección vertical	Δy	DYv	m
Tamaño de un elemento de la malla en dirección horizontal	Δx	DXv	m
Deformación relativa a los esfuerzos de la placa (1*)	ϵ_x	defx	-
Deformación relativa a los esfuerzos de la placa (2*)	ϵ_y	defy	-
Deformación relativa a los esfuerzos de la placa (12*)	ϵ_{xy}	defxy	-
Dominio de las variaciones de propiedades mecánicas	θ	Angulo	°
Ángulo de orientación de las fibras de la lámina bidireccional θ_{Or}	θ_{Or}	Allaminav	°
Número de nodos existentes en la malla	Π	NODOS	-
Nodo de superior izquierdo de la zona de aplicación de la carga distribuida	Π_{CD_1}	NodoC1v	-
Nodo de superior derecho de la zona de aplicación de la carga distribuida	Π_{CD_2}	NodoC2v	-
Nodo de inferior derecho de la zona de aplicación de la carga distribuida	Π_{CD_3}	NodoC3v	-
Nodo de inferior izquierdo de la zona de aplicación de la carga distribuida	Π_{CD_4}	NodoC4v	-
Densidad de la fibra	ρ_f	Dfibrav	kg/m ³
Densidad de la lámina	ρ_L	Dlaminav	kg/m ³
Densidad de la matriz	ρ_m	Dmatrizv	kg/m ³
Densidad del núcleo de la estructura tipo sándwich	ρ_n	DensidadNucleo	kg/m ³
Densidad de la piel de la estructura tipo sándwich	ρ_p	DensidadPiel	kg/m ³
Gravedad específica de la fibra	ρ_{rf}	GEfibrav	-
Gravedad específica de la matriz	ρ_{rm}	GEmatrizv	-
Esfuerzo último de la fibra	σ_f	EULfibrav	Pa
Esfuerzo último de la lámina	σ_L	SigmaLamina	Pa
Esfuerzo último del laminado	σ_{La}	SigmaLaminado	Pa
Esfuerzo máximo del nodo de máxima deflexión	σ_{max}	Sigmamax	Pa
Esfuerzo último del material	σ_p	SigmaPlaca	Pa
Esfuerzo último de tensión de la fibra (1*)	σ_{TUlt_f}	EULfibrav	Pa
Esfuerzo último de tensión de la matriz (1*)	σ_{TUlt_m}	EULmatrizv	Pa
Esfuerzo último de cortante (12*)	τ_f		Pa
Relación de Poisson de la fibra (12*)	ν_{12f}	RPfibrav	-

Concepto	Símbolos	Variable en el algoritmo	Unidades
Relación de Poisson de la lámina a 0° (12*)	ν_{12L}	RMPlaminav	-
Relación de Poisson del laminado (12*)	ν_{12La}	RPLaminadov	-
Relación de Poisson de la lámina a θ_{Or}° (12*)	ν_{12Lor}	MTAlaminav	-
Relación de Poisson de la matriz (12*)	ν_{12m}	RPmatrizv	-
Relación de Poisson de la lámina a 0° (21*)	ν_{21L}	RMEPlaminav	-
Relación de Poisson del laminado (21*)	ν_{21La}	RMPLaminadov	-
Relación de Poisson en función de θ	ν_{xy}	RPxy	-
Máximo error permisible en la solución	Ω	tol	-
Número de divisiones laterales de acuerdo con el tipo de malla	β	Divisionesv	-
Ancho de la placa de material compuesto	A	AnchoPlacav	m
Matriz de rigidez extensional [a*]	A_{ij}	\ddot{A}	-
Largo de la placa de material compuesto	B	LargoPlacav	m
Coseno de los ángulos θ	c	c	-
Distancia entre los centroides de las pieles de la estructura tipo sándwich	c_h	h	m
Rigidez a la flexión	D	D	-
Módulo longitudinal de la fibra (1*)	E_{1f}	MEfibrav	Pa
Módulo longitudinal de la lámina a 0° (1*)	E_{1L}	MLlaminav	Pa
Módulo longitudinal del laminado (1*)	E_{1La}	MLLaminadov	Pa
Módulo longitudinal de la lámina a θ_{Or}° (1*)	E_{1Lor}	MLAlaminav	Pa
Módulo longitudinal de la matriz (1*)	E_{1m}	MEmatrizv	Pa
Módulo transversal de la lámina a 0° (2*)	E_{2L}	MTlaminav	Pa
Módulo transversal del laminado (2*)	E_{2La}	MTLaminadov	Pa
Módulo transversal de la lámina a θ_{Or}° (2*)	E_{2Lor}	RMPLAlaminav	Pa
Módulo longitudinal y transversal en función de θ	E_{xx}	MEx	Pa
Constante para el nodo en cuestión	F1	F1	-
Constante para los nodos superior e inferior	F2	F2	-
Constante para los nodos izquierdo y derecho	F3	F3	-
Constante para los nodos esquineros	F4	F4	-
Constante para los nodos doblemente superior e inferior	F5	F5	-
Módulo cortante de la fibra (12*)	G_{12f}	Gfibrav	Pa
Módulo cortante de la lámina a 0° (12*)	G_{12L}	Glaminav	Pa
Módulo cortante del laminado (12*)	G_{12La}	GLaminadov	Pa
Módulo cortante de la matriz (12*)	G_{12m}	Gmatrizv	Pa
Módulo cortante de la lámina a θ_{Or}° (12*)	G_{12Lor}	MCAlaminav	Pa
Módulo cortante en función de θ	G_{xy}	Gxy	Pa
Relación del número de hilos en la lámina bidireccional	k	k	-

Concepto	Símbolos	Variable en el algoritmo	Unidades
Matriz de coeficientes formada por las ecuaciones de cada nodo	K_{ij}	K	-
Fracción másica de la fibra	M_f	Fmfibrav	-
Fracción másica de la matriz	M_m	FMmatrizv	-
Momento máximo	M_{max}	Mmax	Nm
Momento en el eje x	M_x	MOMX	Nm
Momento en xy	M_{xy}	MOMXY	Nm
Momento en el eje y	M_y	MOMY	Nm
Margen de seguridad (1*)	MS_1	FactorSeguridad1v	-
Margen de seguridad (2*)	MS_2	FactorSeguridad2v	-
Margen de seguridad (12*)	MS_{12}	FactorSeguridad3v	-
Nodo de aplicación de la carga puntual	N_{CP}	NodoCv	-
Número de iteraciones realizadas para hallar la solución	N_{Itr}	GaussItr	-
Número de láminas que componen el laminado	N_{TL}	NumLamv	-
Valor de la carga transversal	P	CargaValorv	N/Pa
Coefficiente del vector fuerza	\bar{P}	PP	-
Vector fuerza	P_{ij}	Fuerza	-
Matriz de rigidez reducida [a*]	Q_{ij}	Q	-
Matriz de rigidez reducida transformada [a*]	\bar{Q}_{ij}	Qs	-
Seno de los ángulos θ	s	s	-
Matriz de conformidad [a*]	S_{ij}	ST	-
Espesor del plano medio	$t_{1/2}$	PlanoMedio	m
Tiempo invertido en realizar el proceso iterativo	T_{Itr}	TiempoItr	S
Espesor de la lámina	t_L	EspLamv	m
Espesor mínimo para la carga aplicada	t_{min}	EspesorMinimo	m
Espesor del núcleo de la estructura tipo sándwich	t_{NS}	EspNucleov	m
Espesor total de la placa de material compuesto	t_{PC}	EspesorPlacav	
Espesor total del laminado	t_{TL}	EspTotalv	m
Fracción volumétrica de la fibra	V_f	FVfibrav	-
Fracción volumétrica de la fibra	V_m	FVmatrizv	-
Matriz de coordenadas en el eje x	X_{ij}	X1	-
Matriz de coordenadas en el eje y	Y_{ij}	Y1	-
Matriz de coordenadas en el eje z	Z_{ij}	ZZ	m

Introducción

Este trabajo de grado presenta la elaboración, funcionamiento y validación de la herramienta computacional ARCUM (Aplicación para la Resolución de Casos de deformación en el Uso de Materiales compuestos), capaz de determinar el comportamiento de una placa de material compuesto sometida a una carga normal de tipo puntual o distribuida. Este análisis es efectuado por ARCUM por medio del método de diferencias finitas, el cual, al crear una malla a partir de un número específico de divisiones bidimensionales sobre una placa, permite determinar la deformación en puntos específicos y predecir su condición final, facilitando la ejecución de los modelos iterativos que son frecuentemente utilizados para obtener dicha deformación.

ARCUM surge como solución a los problemas de ejecución de casos intermedios de diseño de materiales compuestos y análisis de deformación de placas que, al no ser lo suficientemente complejos para ser evaluados en plataformas especializadas como ANSYS, ni ser lo suficientemente sencillos para ser resueltos por medios manuales, requieren el uso de herramientas computacionales que permitan la entrada y obtención de datos de manera simple para ser visualizados y determinar su aplicabilidad en proyectos de investigación relacionados con el uso de materiales compuestos.

ARCUM parte de modelos matemáticos existentes referentes al diseño y cálculo de propiedades mecánicas como módulos de elasticidad, relaciones de Poisson y módulos cortantes de láminas, laminados y estructuras tipo sándwich; permitiendo predecir, al ser aplicada una carga normal, los resultados numéricos y esquemáticos como esfuerzos, momentos flectores, deformaciones y el factor de seguridad, los cuales serán descritos en este documento.

1. Planteamiento del problema

1.1. Antecedentes

Dado que numerosos autores han realizado estudios y compilaciones de orden teórico y práctico, acerca del diseño, prueba, optimización y caracterización de materiales compuestos, esta sección expondrá los principales trabajos realizados por universidades a nivel nacional e internacional, que sirvieron como base para llevar a cabo el proyecto en cuestión, proporcionando consideraciones y referencias adicionales para la estructura lógica y visual de la herramienta computacional a elaborar.

1.1.1. Nacional/local

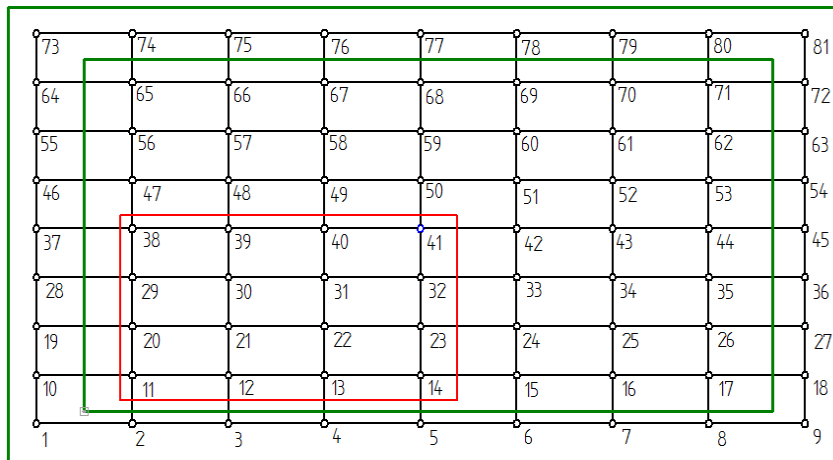
- *Caracterización de un material compuesto que está sometido a impactos para aeronaves no tripuladas.*

En la Universidad de San Buenaventura, se realizó la caracterización de un material compuesto que resistiera al impacto para ser utilizado en una aeronave no tripulada denominada USBAgro, ya que esta no poseía tren y aterrizaba con una pérdida de sustentación profunda a baja altura (Luna Amezcua & Navas Mantilla, 2016).

Para ello, los autores realizaron, entre otros análisis estructurales, el análisis de pandeo de una placa constituida por fibras, de carbono y Kevlar, y resina epóxica, a partir del método de diferencias finitas planteado por (Peery & Azar, 1982), resolviendo una ecuación diferencial de cuarto orden que dependía de la fuerza externa, y una constante que tenía en cuenta el módulo de elasticidad y la relación de Poisson; dicha placa fue sometida a tres casos distintos de evaluación, variando la carga aplicada y, por ende, los momentos flectores máximos.

Teniendo en cuenta que la placa fue dividida en 8 secciones laterales, por lo que contó con 81 nodos en total en la superficie de la placa Figura 1-a; los autores determinaron la deflexión de la placa, de dimensiones 160 x 80 milímetros como se ve en la Figura 1-b, y el espesor óptimo para los tres casos de estudio, obteniendo la predicción de la deformación en tres dimensiones.

a)



b)

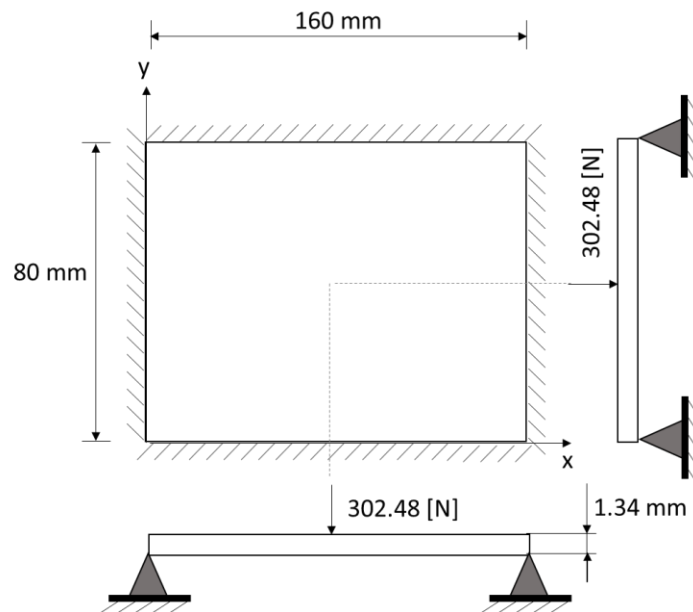


Figura 1 a) Dimensiones de la placa de estudio b) Malla utilizada para el análisis de pandeo (Luna Amezcuita & Navas Mantilla, 2016)

Las apreciaciones tomadas en cuenta para el análisis incluían tanto las condiciones de frontera, asumiendo que los bordes de la placa se encontraban completamente fijos, como las de simetría de la placa, en la que al estar aplicada la carga de manera puntual y en medio de la misma, se redujo el tamaño de la matriz de coeficientes obtenida por el sistema compuesto por las ecuaciones de cada nodo, y utilizada por el método de diferencias finitas para obtener el vector de deformaciones; centrándose simplemente en un cuarto de la placa como se puede observar en la Figura 1-a.

Finalmente, el análisis de pandeo, que tenía el propósito de obtener el espesor requerido del compuesto para soportar las cargas aplicadas en cada caso, fue realizado de manera manual, generando, de acuerdo con las conclusiones de los autores del trabajo de grado, una matriz de coeficientes compleja, recomendando realizar un análisis de pandeo más detallado para obtener resultados de mayor exactitud.

▪ ***Aplicación de un programa para soportar el proceso de diseño de materiales compuestos.***

Asimismo, en la Universidad de los Andes, el autor de este trabajo de grado desarrolló un software para el proceso de diseño de materiales compuestos, el cual consistía en dos grandes módulos: el de materiales y el de mecánica de materiales compuestos, este último se dividía en tres, el módulo de análisis macromecánico, el de análisis micromecánico y los casos de diseño (Flórez Rodríguez, 2008).

El primero de estos tres últimos grupos se constituía por el análisis y diseño de láminas unidireccionales en cuanto a sus propiedades mecánicas, el segundo hacía referencia tanto a la transformación de esfuerzo y deformaciones de las láminas como de

los laminados y sus propiedades y, el tercero, a las placas de laminados compuestos (Flórez Rodríguez, 2008).

A lo largo del documento se plantean las relaciones matemáticas necesarias para llevar a cabo los cálculos principales para cada módulo y, como se observa en la Figura 2 y la Figura 3, se desarrolló la interfaz del software propuesto para la resolución de problemas de ingeniería. Adicionalmente, el autor plantea la implementación de nuevos conceptos referentes al diseño estructura de este tipo de materiales tales como las estructuras tipo sándwich, los esfuerzos interlaminares y teoría de falla de laminados.

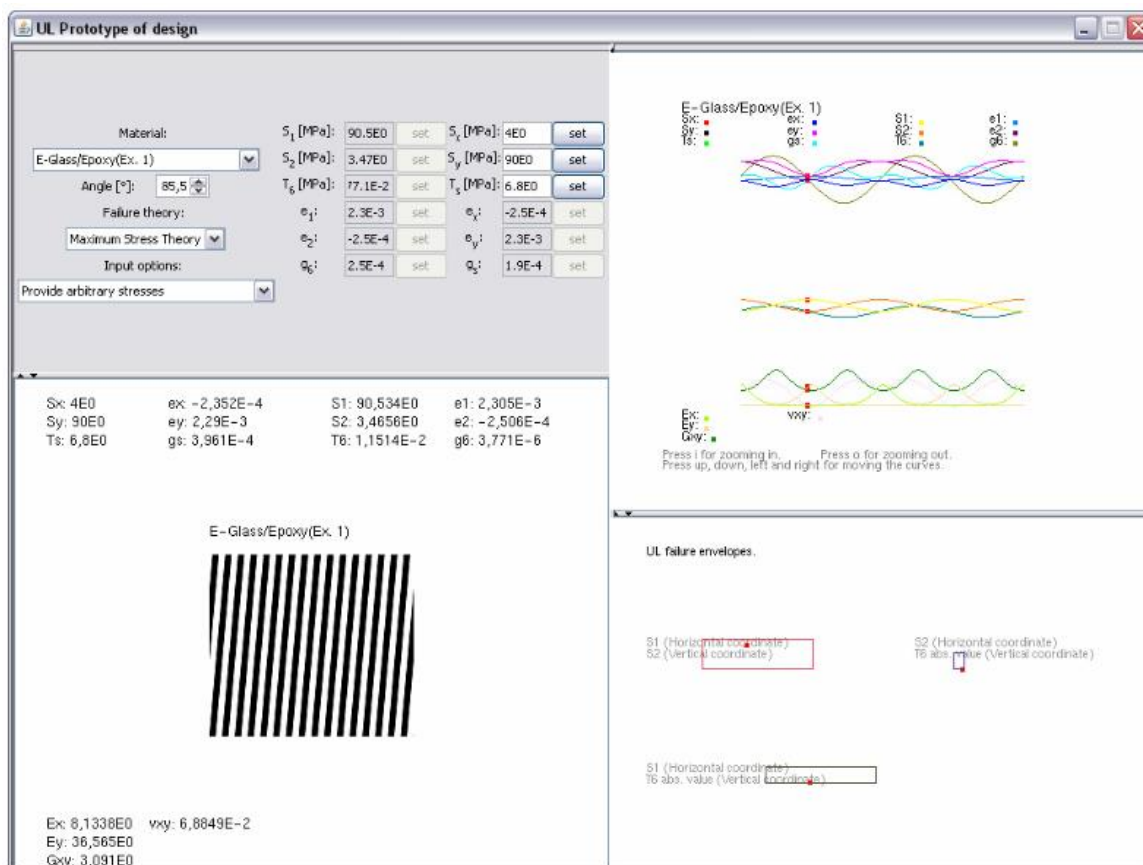


Figura 2 Módulo de las propiedades de diseño para el software (Flórez Rodríguez, 2008)

bibliografía y posteriormente, realizó una solución computacional utilizando el lenguaje de programación FORTRAN, planteando un software que contiene dos partes: el cálculo de rigidez y el cálculo de resultados mecánicos en los puntos deseados de la estructura (Balogh, 2013).

El programa contiene las variables de ángulo de orientación principal de los laminados, el grosor del núcleo de la estructura tipo sándwich, el módulo elástico, las dimensiones, el número de láminas en placas de laminado y las cargas aplicadas. Adicionalmente, la interfaz gráfica fue realizada en Visual Basic, donde se exige la locación de la carga concentrada a partir de la posición del cursor en la ventana. En la Figura 4 se puede observar la ventana inicial del software donde se pueden apreciar los cuatro tipos de placas que pueden ser analizados por el software (Balogh, 2013).

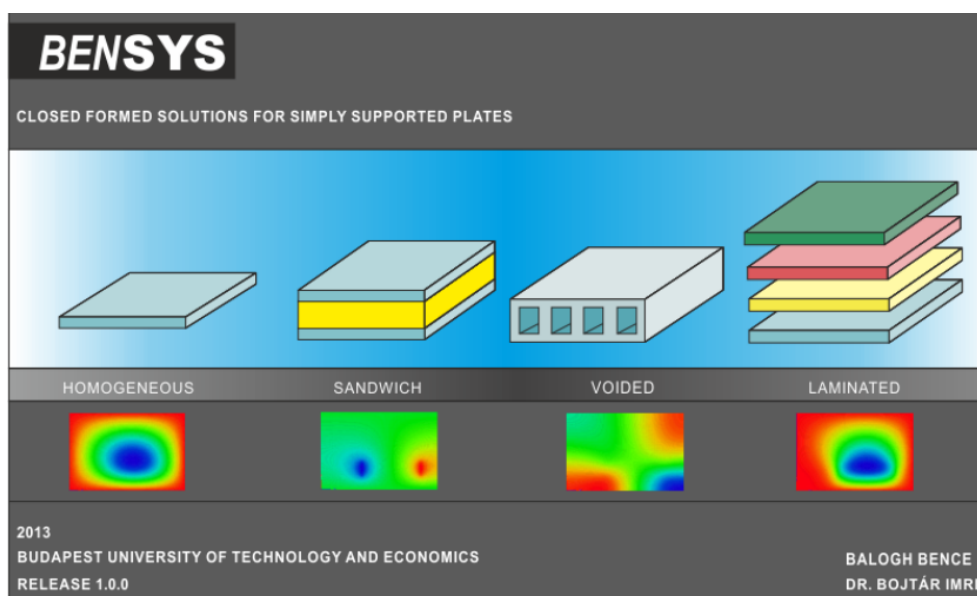
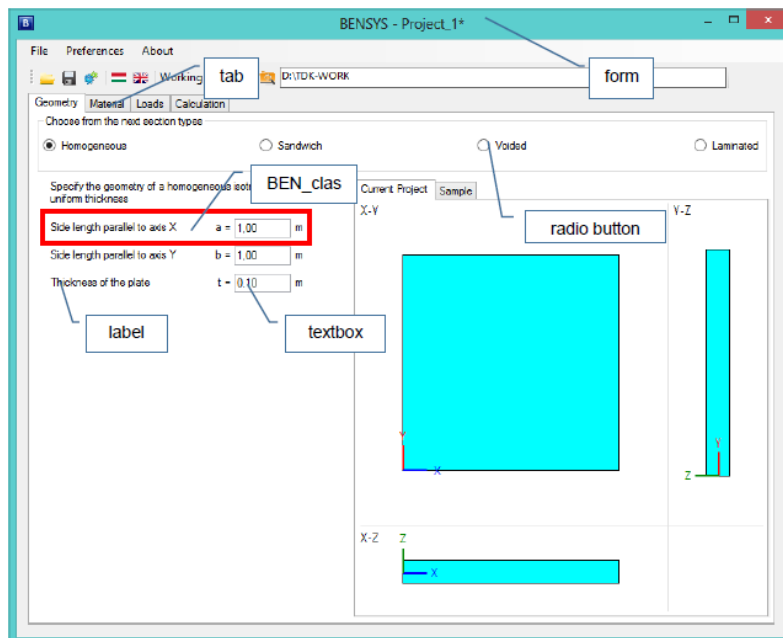


Figura 4 Configuraciones de placas en la ventana inicial de BENSYS dirigido (Balogh, 2013)

Además, el autor realizó la verificación de los casos de carga que pueden seleccionarse, teniendo en cuenta una carga puntual y uniforme y la evaluación

dependiendo del tipo de placa requerida, proporcionando diagramas y gráficas que ilustraban la deflexión en determinados puntos. En la Figura 5-a, se puede observar la interfaz gráfica de BENSYS para el ingreso de propiedades y dimensiones mientras que en la Figura 5-b puede observarse el panel de resultados en gráficos tipo mapa de color.

a)



b)

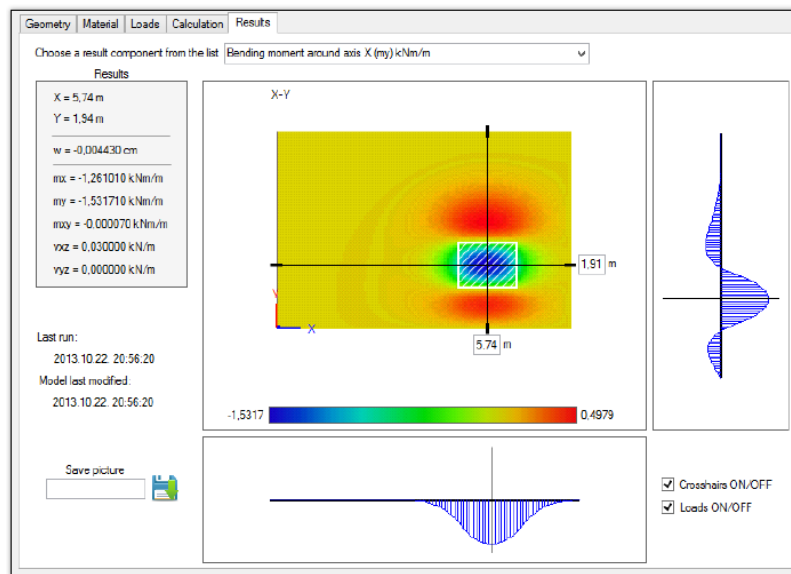


Figura 5 a) Módulo para el modelado de la placa y modificación del material b) Ventana de resultados de BENSYS (Balogh, 2013)

- *Aplicación del método de diferencias finitas al estudio del fenómeno en la teoría de placas delgadas.*

En la State University of Novi Pazar de Serbia, los autores (Dolicnin, Nikolic, & Dolicanin, 2010) realizaron el análisis de las condiciones de esfuerzo y deformación en placas planas a partir del método de diferencias finitas.

A lo largo del artículo, los autores desarrollan tres ejemplos de deflexión de placas bajo una carga dada, planteando tres casos diferentes y teniendo en cuenta que en cada uno de ellos a y b son las dimensiones de la placa en el plano xy , δ el espesor de la placa, F la carga puntual aplicada en el caso 1 y q la carga distribuida en los casos 2 y 3.

En el primer caso, se consideró una fuerza puntual normal a la superficie en medio de la placa como se ve en la Figura 6; en el segundo, una fuerza distribuida como se observa en la Figura 7 y, finalmente, una carga continua triangular mostrada en Figura 8.

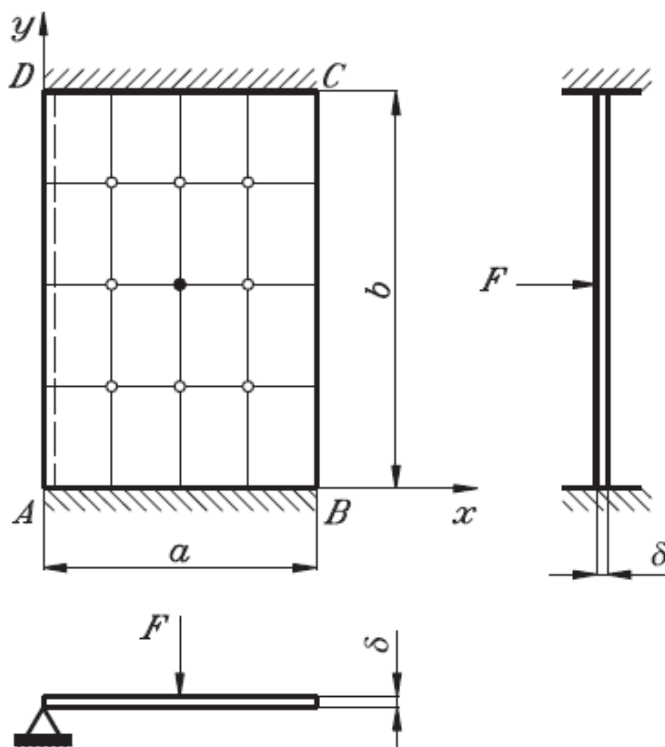


Figura 6 Carga puntual aplicada en el centroide de la placa plana (Dolicnin, Nikolic, & Dolicanin, 2010)

Para el segundo caso se estableció el comportamiento de la carga de acuerdo con el nodo, evidenciándose una reducción del valor de la carga desde el centro hacia los bordes de la placa, de modo que en el nodo central la carga era equivalente a q como se muestra en el numeral 1) de Figura 7, en los nodos 1,2,3 y 4 la carga equivalía $q/2$, como se puede observar en el numeral 2) y, finalmente en los nodos 5,6,7 y 8 la carga equivalía $q/4$ como se muestra en el numeral 3).

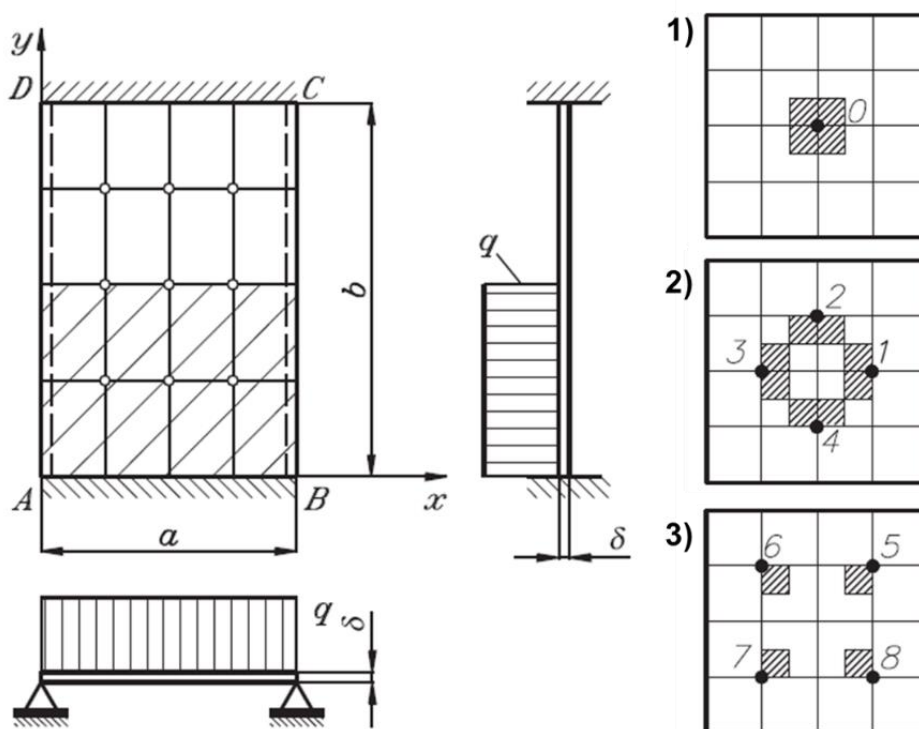


Figura 7 Carga rectangular aplicada transversalmente en la placa (Dolicanin, Nikolic, & Dolicanin, 2010)

Se debe resaltar que las condiciones de frontera son diferentes en los casos de estudio, de manera que en el primer y segundo caso la placa se encuentra apoyada solamente en dos de sus bordes, mientras que en el tercer caso se encuentra soportada en todos sus bordes, coincidiendo con la condición de frontera que será tenida en cuenta para el actual proyecto de grado.

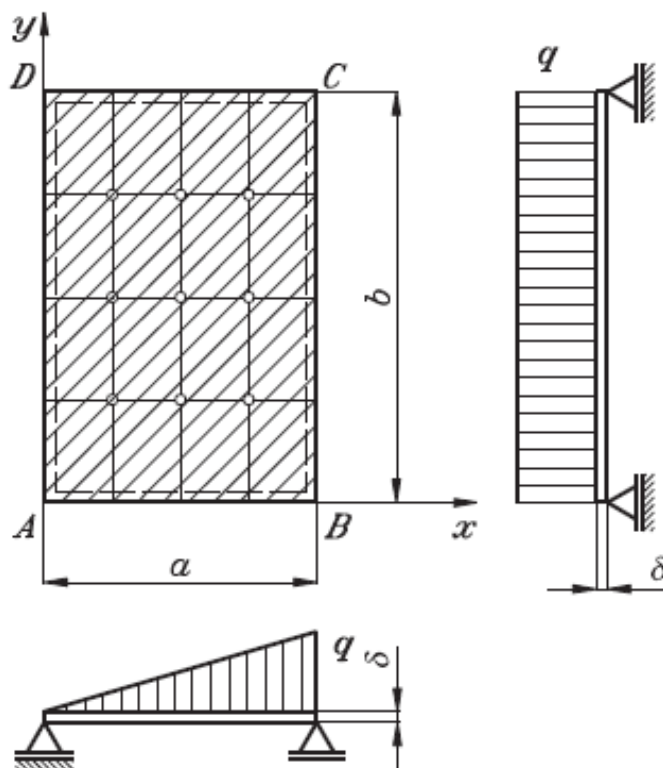


Figura 8 Carga triangular q aplicada transversalmente en la placa (Dolicanin, Nikolic, & Dolicanin, 2010)

Finalmente, a partir de los análisis realizados, los autores reafirman la efectividad de dicha metodología para la obtención de resultados referentes a la deformación, esfuerzos y momentos de la placa delgada, al proveer ventajas significativas en comparación a los métodos analíticos convencionales (Dolicanin, Nikolic, & Dolicanin, 2010).

1.2. Descripción y formulación del problema

Debido al constante crecimiento del interés de la industria aeronáutica en los materiales compuestos (Alvarado Prieto, 2014), es necesario impulsar el manejo de los conocimientos que involucran el análisis estructural de este tipo de materiales por parte del sector académico e investigativo; sin embargo, la resolución de los cálculos que se requieren para un estudio de caracterización de materiales compuestos posee una complejidad proporcional al tiempo invertido en su solución; razón por la cual, en proyectos universitarios, el diseño se ve afectado por la dificultad de los cálculos para determinar una configuración más apropiada para cada aplicación.

Adicionalmente, las herramientas computacionales comerciales dedicadas al análisis estructural con las que cuenta la Universidad de San Buenaventura como ANSYS o CATIA V5, permiten un análisis de una estructura ya establecida, más no la determinación de la mejor configuración para una situación o aplicación determinada.

Es por esto que se presentan constantes procesos iterativos de selección y configuración de materiales compuestos en la mayoría de los proyectos universitarios del Programa de Ingeniería Aeronáutica que comprometen el uso de este tipo de materiales y, por ende, presentan múltiples complicaciones en las etapas posteriores del proceso de diseño, sea un análisis estructural más avanzado o una fase de manufactura.

A partir de lo anterior se pueden resumir los dos principales obstáculos en el proceso de análisis de deformación; en primer lugar, el tiempo de resolución manual que tiene como consecuencia un número reducido de casos evaluados en un determinado tiempo y, en segundo lugar, la complejidad de los procesos iterativos que tienen como consecuencia una alta probabilidad de error en la solución. Teniendo en cuenta los dos inconvenientes que restringen en mayor medida el análisis estructural en este tipo de materiales, se plantea la siguiente problemática:

¿Cómo facilitar el proceso de análisis de deformación de una placa de material compuesto tipo sándwich sometida a una carga normal?

1.3. Justificación

La inclusión de los materiales compuestos como solución a los problemas de resistencia a cargas, peso o la fabricación de partes de formas complejas, ha ido incrementando abruptamente a lo largo de los años (Alvarado Prieto, 2014), invirtiendo en recursos para, no solo obtener nuevas

configuraciones, combinaciones y propiedades que suplan las necesidades de cada aplicación, sino también para optimizar los procesos con los que, actualmente, se trabaja este tipo de materiales.

Con el propósito de preparar profesionales con habilidades en las tecnologías actuales; desde las instituciones académicas se ha fomentado el desarrollo de proyectos que incluyan el uso de materiales compuestos y la creación de herramientas que faciliten y agilicen las diferentes fases del proceso de implementación de estos como parte clave de los resultados eficaces en sistemas estructurales.

Es por esto, que el presente proyecto, denominado proyecto ARCUM (Aplicación para la Resolución de Casos de deformación en el Uso de Materiales compuestos), busca proporcionar, principalmente, a los estudiantes de la Universidad de San Buenaventura sede Bogotá, un instrumento que permita obtener resultados generales del comportamiento de láminas, laminados y estructuras tipo sándwich, a partir del ingreso de variables globales para evitar así el ciclo exhaustivo de prueba y error al caracterizar materiales o el tiempo significativo empleado en los análisis especializados, así como también evitar la mayor cantidad de errores que puedan presentarse en los análisis realizados de forma manual y funcionar como fuente de información y punto de partida para posteriores proyectos y/o actividades académicas que incluyan el uso de compuestos.

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

Elaborar una herramienta computacional que permita analizar la deformación ocasionada en una placa de material compuesto tipo sándwich, debido a una carga normal aplicada.

1.4.2. Objetivos específicos

- Elaborar un código computacional que permita el proceso de análisis de materiales compuestos en modo lámina, laminado y estructuras tipo sándwich, sometidos a una carga normal aplicada.
- Elaborar una interfaz gráfica que permita al usuario configurar el caso de estudio, ejecutar el código computacional y visualizar los resultados del análisis.
- Evaluar el funcionamiento de la aplicación en términos de la reducción de tiempo de análisis y la exactitud de los resultados de este.

1.5. Alcances y limitaciones

1.5.1. Alcances

- La carga a la que es sometida la placa de material compuesto puede ser puntual o distribuida en una determinada área de tipo uniforme rectangular.
- La aplicación mostrará la distribución de deformación de la placa en 3 dimensiones, según sea la fuerza aplicada, realizando una representación gráfica tipo mapa de color utilizando los comandos del mismo nombre en Matlab.
- La aplicación será capaz de mostrar las curvas de esfuerzo contra deformación de lámina y laminado, partiendo de los datos ingresados por el usuario.
- La aplicación utilizará la orientación de cada una de las capas del laminado proporcionadas por el usuario.
- La aplicación determinará el mínimo espesor requerido para la carga aplicada.
- La aplicación integrará adicionalmente, un módulo de guía de funcionamiento.
- La aplicación permitirá el proceso de análisis en tres configuraciones distintas: lámina, laminado y estructuras tipo sándwich.

- Se elaborarán los protocolos de uso para la aplicación.
- El método de resolución será por diferencias finitas.
- El análisis de deformación que se realizará a la placa será por flexión.

1.5.2. Limitaciones

- La aplicación será desarrollada únicamente en Matlab.
- La placa será analizada asumiendo que se encuentra empotrada en sus cuatro bordes, para establecer dicha condición de frontera.
- Solo se tendrán en cuenta las cargas aplicadas de manera normal o perpendicular a la superficie a analizar.
- La aplicación se encuentra orientada a tres materiales compuestos de matrices poliméricas, fibra de carbono, de vidrio y Kevlar.
- La aplicación está dirigida a aquellos casos donde se pueda asumir que la carga existente es aplicada sobre una geometría de tipo placa plana.
- Los únicos datos de entrada de la aplicación, dados por el usuario son las dimensiones de ancho y largo de la placa, la fuerza aplicada, su zona de aplicación y el material deseado.
- Las dimensiones máximas de la placa serán 500 mm x 500 mm y un espesor de 50 mm, según el promedio de los materiales compuestos encontrados en el mercado (Aircraft Spruce & Specialty Co., 2018).
- Los laminados integrados en la configuración de estructura tipo sándwich serán asumidos del mismo espesor y material.
- Se utilizará, para el núcleo, solo espuma de poliuretano.
- No se llevará a cabo ningún análisis de tipo interlaminar.

- No se predecirá la deformación de la estructura internamente.
- Se tendrán en cuenta, para las fibras, únicamente los tejidos planos.
- El porcentaje de error aceptable entre los resultados arrojados por la aplicación y los datos de comparación es de máximo 5%.

2. Marco de referencia

2.1. Marco teórico y conceptual

Para la revisión de conceptos y características clave que se encuentran involucrados en el análisis de deformaciones y caracterización de materiales compuestos, se parte de la definición y clasificación de éstos, su estructura, aplicación, posteriormente las variables y principios que son abarcados en el cálculo y análisis y finalmente, los recursos computaciones utilizados para la ejecución y validación de este proyecto.

2.1.1. Materiales compuestos

Los materiales compuestos son definidos como aquellas uniones a nivel macroscópico de dos o más materiales distinguibles y separables mecánicamente, que resulta en la combinación de propiedades de los materiales originales, incrementándose las capacidades estructurales. Según su configuración se pueden clasificar de la siguiente manera (Kaw, 2006).

- ***Láminas.***

Una lámina es una capa delgada de material compuesto que se encuentra constituida por una fase continua y una discontinua, matriz y refuerzo respectivamente; donde este último, a pesar de ser presentado en otras formas (escamas o partículas), será tenido en cuenta, para el presente proyecto, en forma de fibras (Jones, 1999).

- a) ***Fibras.***

Las fibras proveen la resistencia al compuesto, proporcionando propiedades distintas y adaptables de acuerdo con la función que sea requerida; partiendo de factores

geométricos, como su longitud o forma o de su orientación y material, influenciando directamente el rendimiento mecánico del material compuesto final.

Adicionalmente, las láminas pueden ser categorizadas de acuerdo con la dirección que posean las fibras que la componen, pudiendo ser unidireccionales o bidireccionales. Éstas últimas usualmente son constituidas por fibras en direcciones perpendiculares que permiten balancear las propiedades mecánicas en ambas direcciones cuando es requerido; variando en el tipo de tejido que poseen, que para el caso del presente proyecto será plano, el cual es equivalente a un entrelazado simétrico, alternando un paso a cada fibra (NetComposites Ltd, 2018), como se observa en la Figura 9.

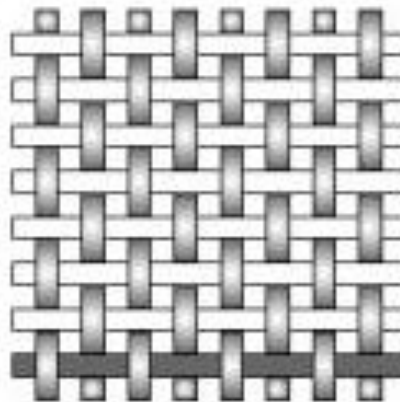


Figura 9 Esquema de una fibra bidireccional en forma de tejido plano (NetComposites Ltd, 2018)

Dado que en la industria aeroespacial las fibras comúnmente utilizadas son las de vidrio, kevlar y carbono (Alvarado Prieto, 2014), serán la fibra de E-glass, la fibra de Kevlar 49 y la fibra de Carbono AS4, las tenidas en cuenta para el desarrollo del proyecto, como se especificó en la sección 1.5.2.

b) *Matrices.*

A pesar de poseer bajas propiedades mecánicas individualmente, las matrices, en los compuestos, cumplen funciones de protección y distribución de cargas en las fibras, adicionalmente mantienen juntas a las mismas e influyen en propiedades del compuesto como la resistencia transversal y cortante y la resistencia térmica.

Teniendo en cuenta que los materiales compuestos avanzados más comunes son los que poseen matrices poliméricas, debido a su bajo costo, alta resistencia y principios simples de manufactura, son las resinas epóxica, de poliéster y poliamida las que serán utilizadas para el desarrollo del presente proyecto, dejando de lado los compuestos de matrices cerámicas y metálicas.

▪ *Laminados.*

El laminado es la unión de un conjunto de láminas individuales, donde cada una de ellas tiene una determinada ubicación, material y ángulo de orientación respecto a un eje como se muestra en la (Kaw, 2006).

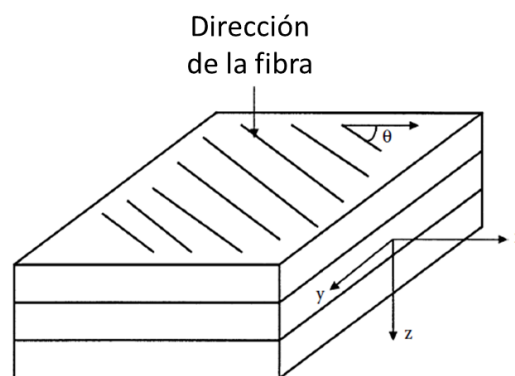


Figura 10 Esquema de un laminado (Kaw, 2006)

Esta secuencia ordenada de direcciones correspondientes a cada capa existente en el laminado es denominada código del laminado y, de acuerdo con su espesor, material y

posición con respecto al eje de referencia, pequeñas convenciones son utilizadas para referirse a ellos. Para este proyecto, el tipo de laminado que será tenido en cuenta será simétrico, el cual se caracteriza por poseer láminas de la misma orientación, material y espesor dispuestas simétricamente respecto al plano medio, como se describe en la expresión dada en la ecuación (1), en donde con el subíndice S se especifica su simetría (Kaw, 2006).

$$[\theta_1, \theta_2]_S = [\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1] \quad (1)$$

- ***Estructuras tipo sándwich.***

Por su parte, una estructura denominada tipo sándwich, es un sistema compuesto por dos pieles resistentes y un material ligero denominado núcleo, unidos por una interface que usualmente es un elemento adhesivo.

Las pieles o revestimientos de este tipo de estructura son los laminados de material compuesto que encierran dicho núcleo, encargadas de resistir el esfuerzo de flexión al que se encuentra sometida la estructura, mientras que el núcleo representa la resistencia a los esfuerzos cortantes y no permite el desplazamiento longitudinal de las pieles entre las cuales se encuentra.

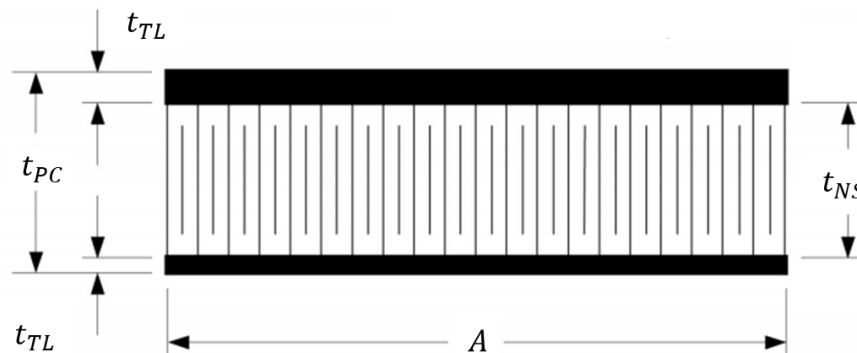


Figura 11 Nomenclatura de una estructura tipo sándwich (Heslehurst, 2015)

En la Figura 11 se muestra esquemáticamente la estructura tipo sándwich donde A es el ancho, t_{TL} es el espesor de la piel y t_{NS} el espesor del núcleo. El material del núcleo, adicionalmente, puede ser clasificado en dos grandes grupos, el tipo panal de abeja y los sintéticos. Para el primero de ellos se puede distinguir tres configuraciones de celdas, las hexagonales, rectangulares y las de tipo trébol o seta, además de destacarse por su peso reducido, bajo costo, rigidez y resistencia de cargas a compresión y tracción (Thomsen, Bozhevolnaya, & Lyckegaard, 2005).

2.1.2. Tipos de análisis de materiales compuestos

- ***Análisis micromecánico.***

Se encuentra orientado a analizar las propiedades y comportamientos en términos de la interacción de las fibras y la matriz, determinando la microestructura de los compuestos. Este proyecto, se encuentra dirigido al análisis de láminas a partir de las variables descritas a continuación:

a) *Fracciones máxicas y volumétricas.*

La fracción volumétrica es definida como la razón entre el volumen, ya sea de las fibras o de la matriz en el compuesto, con respecto al volumen total del mismo. Este parámetro influye directamente en las propiedades de una lámina como el módulo de Young y su relación de Poisson (Buragohain, 2017).

De manera similar a las fracciones volumétricas, las fracciones máxicas indican la relación entre la masa de las fibras o de la matriz respecto a la masa total del material compuesto.

b) *Propiedades mecánicas.*

Partiendo de la Figura 12, en donde se muestra el sistema de coordenadas utilizado para especificar los ejes de referencia utilizados; se definen las cuatro constantes elásticas.

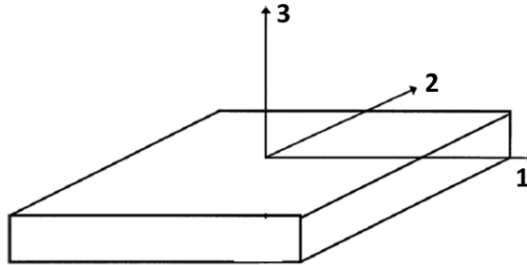


Figura 12 Sistema de referencia del material compuesto (Kaw, 2006)

Las direcciones 1 y 2 indican los ejes longitudinal y transversal, en donde se definen los módulos elásticos correspondientes E_1 y E_2 , que describen la relación entre el incremento de tensión y deformación unitaria producidos; mientras que la dirección 3 hace referencia al eje normal o perpendicular del compuesto. Así mismo, en el plano 1-2, para la descripción de la relación entre la deformación longitudinal y transversal, se definen las dos constantes elásticas adicionales, el módulo cortante y la relación de Poisson, denominadas G_{12} y ν_{12} , respectivamente.

▪ ***Análisis macromecánico.***

Por otro lado, el estudio macromecánico consiste en predecir el comportamiento de las estructuras con base en las matrices de rigidez y las constantes de ingeniería. Este análisis es realizado para lámina y laminado, principalmente a partir de la transformación de esfuerzos.

a) *Relación esfuerzo – deformación.*

La relación de esfuerzo deformación para un material se encuentra dada en términos de la matriz reducida de rigidez, la cual relaciona las fuerzas resultantes presentes en el plano y las deformaciones en el mismo, utilizando las constantes de ingeniería tanto para láminas y laminados.

Esta matriz, modificada por la matriz de transformación que se encuentra constituida por funciones básicas trigonométricas, permite la transformación de esfuerzos en función del ángulo, como se observa en la Figura 13, permitiendo obtener las constantes de ingeniería descritas anteriormente

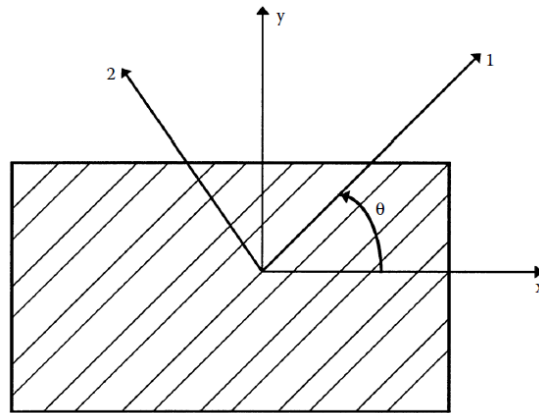


Figura 13 Transformación de ejes de acuerdo con el ángulo de orientación de la fibra (Kaw, 2006)

2.1.3. Teoría de placas

De acuerdo con la teoría de placas (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959), la ecuación de equilibrio que relaciona la rigidez con la flexión D , la carga aplicada P y la deflexión W de una placa rectangular se observa en la ecuación (2).

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (2)$$

Esta expresión se encuentra en función de las dimensiones de un elemento en el eje x o longitudinal y en el eje y o transversal; y es esta ecuación diferencial la que será transformada a términos del método de diferencias finitas para la implementación en el presente proyecto. Adicionalmente y como se observa en la Figura 14, al ser aplicada la carga P , se generan los momentos flectores M_x , M_y y M_{xy} en los bordes empotrados, los cuales afectan directamente los esfuerzos a los que se encontrará sometida la placa.

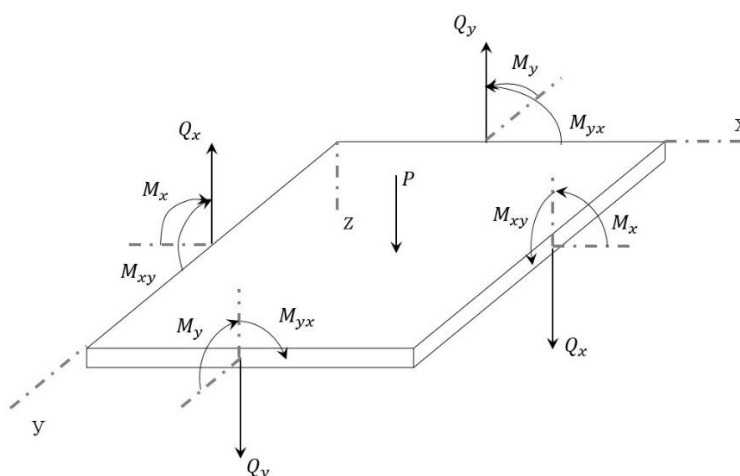


Figura 14 Cargas y momentos flectores presentes en el estado flexional de la placa

2.1.4. Métodos numéricos

El desarrollo del proyecto en cuestión requiere de dos métodos de análisis numérico, el método de diferencias finitas y el método iterativo matricial.

- ***Método de diferencias finitas.***

El método de diferencias finitas permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos, por lo que, para traducir la ecuación (2) en términos de diferencias finitas se deben tener en cuenta las formas de aproximación de las derivadas correspondientes a partir de la expansión en Series de Taylor, la cual será descrita de manera general a continuación.

Siendo $f(x_i+\Delta x)$ una función definida en un punto (a,b), se plantea la primera derivada usando series de Taylor alrededor del punto x_i , dada por la ecuación (3) expresión a (Carrillo Ledesma, Mendoza Bernal, & González Rosas, 2018).

$$a) \quad f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \Delta x^2 \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i}$$

$$b) \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - O_p(\Delta x) \quad (3)$$

$$c) \quad f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

La ecuación (3) expresión b, por su parte simplifica el segundo término, teniendo en cuenta que O_p es el error local de truncamiento y, finalmente la expresión en términos de diferencias finitas para la primera derivada está dada por la ecuación (3) expresión c.

Partiendo de lo anterior y del grado de la ecuación diferencial (2), se plantean las derivadas en términos de diferencias finitas como se observa en la ecuación (4).

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{1}{\Delta x^4} (W_{i,j+2} - 4W_{i,j+1} + 6W_{i,j} - 4W_{i,j-1} + W_{i,j-2})$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{\Delta y^4} (W_{i+2,j} - 4W_{i+1,j} + 6W_{i,j} - 4W_{i-1,j} + W_{i-2,j})$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} [W_{i-1,j+1} + W_{i+1,j+1} + W_{i-1,j-1} + W_{i+1,j-1} \\ &\quad - 2(W_{i-1,j} + W_{i+1,j} + W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) + 4W_{i,j}] \end{aligned}$$

- ***Métodos iterativos.***

Un método iterativo es aquel que calcula de manera progresiva las aproximaciones a la solución de un problema, de manera que la operación numérica es repetida hasta que el resultado converja, es decir, hasta que satisfaga los requisitos determinados inicialmente (Skiba, 2005).

Entre los métodos iterativos utilizados con mayor frecuencia se encuentran los métodos de Gauss- Seidel y Jacobi; los cuales se diferencian, principalmente, en el almacenamiento y condiciones de convergencia, siendo el método de Gauss-Seidel considerado el de mayor conveniencia para cálculos computacionales, al conservar únicamente en la memoria del ordenador el vector de solución de cada iteración, reduciendo los requerimientos de memoria y tiempo de iteración (Michavila & Gavete, 1985).

Partiendo de un criterio de convergencia en donde el error $\Omega = 1 * 10^{-4}$, el método de Gauss Seidel es descrito por la ecuación (5), la cual se encuentra en términos de las matrices y vectores utilizados en el presente proyecto.

$$W_{1:\Pi}^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^{\Pi} (-K_{ij} W_j^{(k-1)}) + F_{1:\Pi}}{K_{ii}} \quad (5)$$

Donde k es el número de iteración, Π tamaño de la matriz lateralmente y las variables i y j , la fila y columna en la matriz, respectivamente. Este método comienza con una aproximación inicial a la solución y genera una sucesión de vectores que convergen en la solución final W , partiendo de la matriz de coeficientes K y F respectivamente (Özişik, Orlande, Colaço, & Cotta, 1994).

2.1.5. Recursos computacionales

- ***MATLAB.***

MATLAB es un entorno computacional utilizado en el desarrollo de algoritmos, visualización y análisis de datos (Hunt, Lipsman, & Rosenberg, 2014); permite la creación de interfaces gráficas de usuario ya sea a partir de la definición de posición y propiedades de los elementos que la conforman, o el modelado esquemático por medio de la herramienta interactiva GUIDE (The MathWorks, 2018), siendo esta última la implementada para el desarrollo de este proyecto de grado.

- ***ANSYS MECHANICAL.***

Es un programa de solución de problemas mecánicos en ingeniería que, a partir del método de elementos finitos (FEA), permite realizar análisis de tipo estructural (ANSYS, 2018).

Como medio de validación del presente proyecto de grado se realizaron análisis estáticos en ANSYS, para determinar la deformación total y esfuerzos normales máximos de las placas soportadas en sus cuatro bordes y sometidas a cargas transversales.

2.2. Marco legal o normativo

Aunque el presente proyecto no tiene como objetivo la caracterización de materiales compuestos, ni requiere de ésta para la ejecución del mismo, es importante tener en cuenta que las propiedades de los materiales utilizados para el diseño de alguno de los casos, sean láminas, laminados o sándwich, se deben basar en las normas y estándares de la Sociedad Americana para Pruebas y Materiales o ASTM por sus siglas en inglés.

En el caso de utilizar materiales compuestos de matriz polimérica como una lámina o un laminado, sus propiedades mecánicas son halladas o validadas mediante pruebas de tensión y flexión. La norma estándar ASTM D3039/D3039M, aplicada a un laminado balanceado y simétrico con respecto a la dirección de la carga de prueba, permite conocer, entre otras propiedades, la resistencia última de tensión, deformación última por tensión y la relación de Poisson.

Por su parte, el estándar ASTM D7264/D7264M a través de dos procedimientos de prueba diferentes, permite hallar las propiedades de resistencia y rigidez a la flexión del material. El primer procedimiento consiste en un elemento apoyado sobre dos puntos al cuál se le aplica una carga centrada lo cual lo convierte en un caso de carga en 3 puntos. El segundo procedimiento consta del elemento apoyado en los mismos 2 puntos principales, pero con dos cargas aplicadas equidistantemente hacia el interior de los apoyos convirtiéndose en un caso de carga de 4 puntos.

Las propiedades de una estructura plana tipo sándwich y su núcleo pueden ser determinadas a partir de diferentes pruebas de tensión y flexión. La norma estándar ASTM C393/C393M describe la prueba de flexión llevada a cabo para conocer la rigidez a la flexión del sándwich y la resistencia y módulo cortante del núcleo de la estructura.

El estándar ASTM C273/C273M detalla un procedimiento específico para encontrar los valores de la resistencia y módulo cortante del núcleo con una carga cortante aplicada en paralelo a la cara plana apoyada. Por otro lado, la norma ASTM C297/C297M presenta también un procedimiento específico para una prueba de tensión sobre la estructura tipo sándwich que, además de arrojar las propiedades mecánicas de tensión conocidas, permite determinar la integridad de la unión entre el núcleo y las caras, factor importante en la estabilidad de la placa y la correcta transferencia de cargas entre el núcleo y las caras.

3. Metodología

3.1. Enfoque de la investigación

El enfoque de este proyecto de grado es empírico-analítico, basándose en las teorías, modelos matemáticos y valores de las propiedades mecánicas de las caracterizaciones de materiales en la bibliografía y resultados proporcionados por ANYS, el software de validación, para realizar el correspondiente análisis e interpretación.

3.2. Línea de investigación de USB/ Sub-línea de facultad/ Campo temático del programa

El campo temático de este proyecto de investigación es el de Estructuras y materiales, pertenecientes a la sub-línea de la facultad de Control de procesos e instrumentación incluida en la línea de investigación de Tecnologías actuales y sociedades de la Universidad de San Buenaventura.

3.3. Desarrollo de la metodología

Como se observa en la Figura 15, la metodología definida para este proyecto de grado, parte del diseño de los módulos de lámina, laminado y sándwich; en donde cada uno de ellos incluye la identificación de variables de entrada y salida, las ecuaciones características en los análisis macro o micro mecánicos según sea la configuración y la elaboración del código computacional de cada módulo desarrollado en Matlab.

Posterior a ello, deben ser integrados los códigos computacionales, relacionándolos entre sí para permitir el flujo de información entre módulos, adquiriendo los valores calculados previamente en caso de que sea necesario. Una vez sean integrados los códigos, se procede a diseñar la interfaz gráfica teniendo en cuenta las entradas y salidas anteriormente identificadas, los alcances, limitaciones y objetivos especificados en las secciones 1.4 y 1.5.

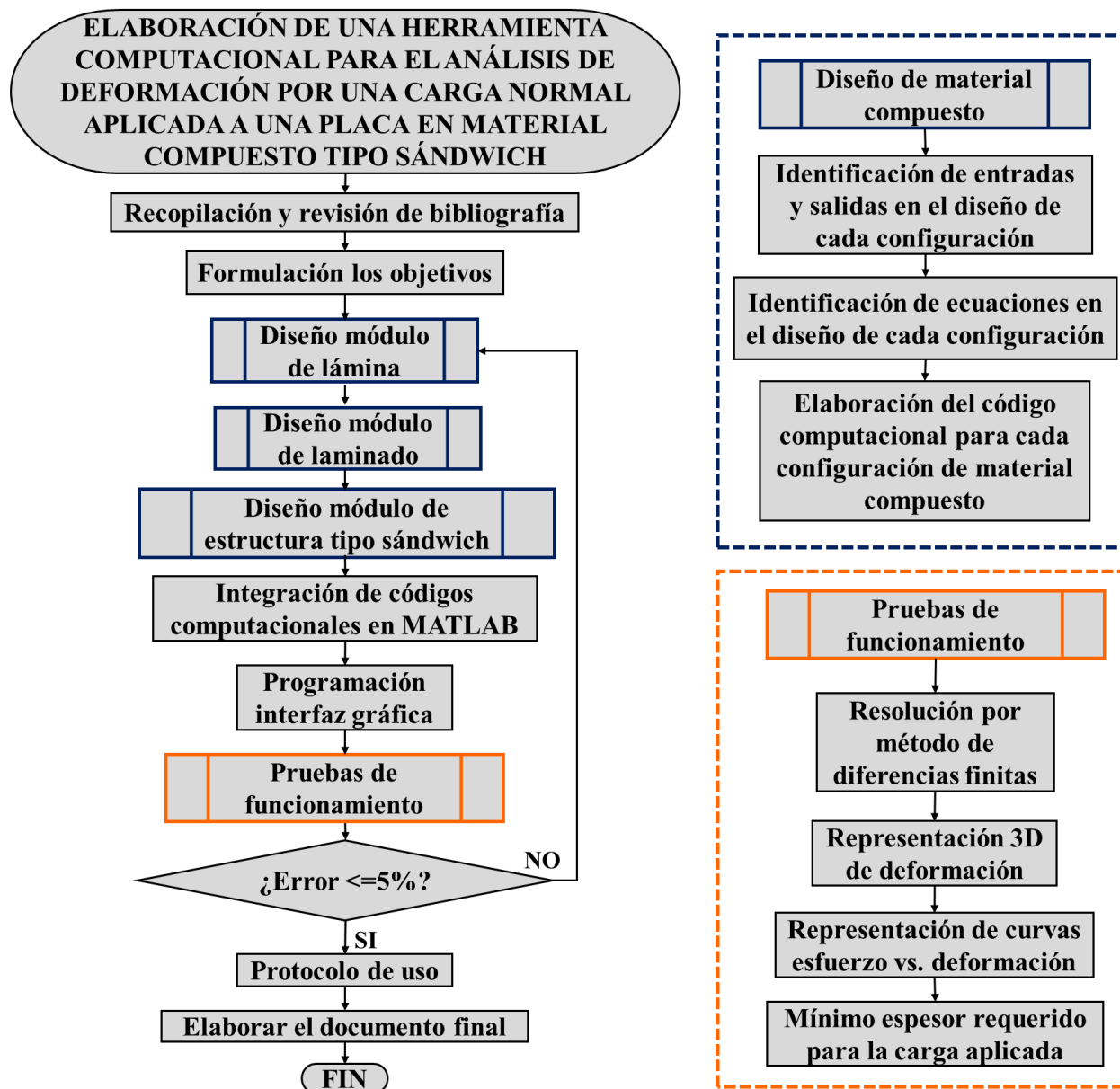


Figura 15 Metodología del proyecto de grado

Partiendo del diseño externo e interno de la herramienta computacional, refiriéndose a la interfaz y el código computacional respectivamente; se realizan las pruebas de funcionamiento, en donde se evalúan los resultados principales estipulados en las secciones mencionadas, incluyendo la resolución de los casos de prueba por medio del método de diferencias finitas, la obtención de

las gráficas de deformación en tres dimensiones, las curvas de esfuerzo contra deformación y el valor del espesor mínimo requerido para la carga aplicada.

En caso de que la comparación de los datos calculados con respecto a los de referencia se obtenga un error mayor al 5%, se debe revisar el código de cada módulo, si no es así se debe elaborar el protocolo de uso y el documento final para su entrega.

Cabe resaltar que la selección del valor de error máximo permisible para este proyecto está dada con base a los porcentajes de error obtenidos en documentos de referencia, los cuales varían entre 0.2 % (Totter, Raichman, & Mirasso, 2015) y 13% (Hossain, Ahmed, & Roknuzzaman, 2017).

4. Desarrollo de ingeniería

4.1. Proyecto ARCUM

La Aplicación para la Resolución de Casos de deformación en el Uso de Materiales compuestos que, como se expuso en la sección 1.3., es simplificada por sus siglas como ARCUM; surge como medio de solución a la problemática planteada en la sección 1.2.

Su principal objetivo es determinar, a partir del método de diferencias finitas, las deformaciones consecuentes de la aplicación de cargas normales ya sean puntuales o uniformemente distribuidas en un área determinada a lo largo de una placa plana que se encuentra empotrada en sus cuatro lados, facilitando el proceso de análisis de deformación por pandeo.

4.1.1. Disposición general

Durante la etapa inicial del proyecto ARCUM se contemplaron dos fases generales: en primer lugar, se consideró la fase lógica que incluiría el desarrollo del algoritmo y en segundo lugar, la fase visual que abarcaría el diseño y la elaboración de la interfaz gráfica de la aplicación. La primera de estas fases se encontraría definida por las ecuaciones referentes al diseño de materiales compuestos, expuestas en el Anexo 1, mientras que la segunda fase, estaría definida por las herramientas gráficas tanto para la adquisición de datos proporcionados por el usuario, como para la exposición de resultados esquemáticos y numéricos, mostrada en el Anexo 4.

Teniendo en cuenta que la herramienta computacional ARCUM estaría dirigida a las tres configuraciones de material compuesto ya mencionadas (lámina, laminado y sándwich), se definieron los posibles casos que se pudieran presentar al momento de diseñar un compuesto en alguna de estas configuraciones; cabe resaltar que cada caso de diseño se encuentra integrado por tres módulos generales: el diseño del compuesto, el

modelado de la placa y la solución; de manera que la variación entre casos radica, fundamentalmente, en el primero de estos módulos. Como se puede observar en la Figura 16 se establecieron tres grupos de acuerdo con la configuración inicial desde la que se llevará a cabo el análisis.

Estas tres categorías denominadas categoría lámina, categoría laminado y categoría sándwich representan el tipo de configuración inicial, desde la cual se realizará el diseño del material compuesto, mientras que el caso de diseño varía de acuerdo con la configuración final de la placa, en la cual se realizará la aplicación de la carga normal.

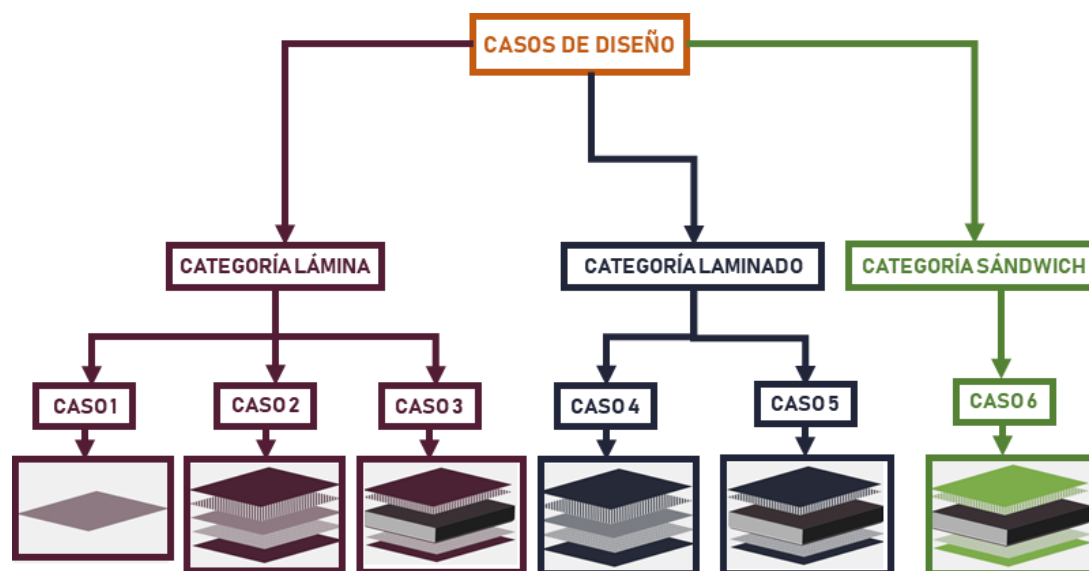


Figura 16 Diagrama de casos de diseño

Teniendo en cuenta que para el presente proyecto de grado se denomina propiedades mecánicas al conjunto de variables formado por los módulos de Young longitudinal y transversal, la Relación de Poisson, el módulo cortante y el esfuerzo último longitudinal del material compuesto en cualquiera de sus configuraciones, se describen a continuación las tres categorías mencionadas.

- ***Categoría lámina***

Esta consiste en el diseño del compuesto sin conocer sus propiedades mecánicas o sin ser adquiridas por cualquier otro recurso; es decir la predicción de las propiedades mecánicas de lámina, laminado y sándwich, es realizada por el código de ARCUM.

Los casos 1, 2 y 3, los cuales constituyen esta categoría y son identificados por el color morado de sus gráficos, se diferencian en el tipo de configuración que posee el compuesto al momento de realizar el modelado de la placa, es decir al asignar las dimensiones y la magnitud y zona de aplicación de la carga, correspondiendo a lámina, laminado y sándwich respectivamente.

- ***Categoría laminado***

En esta categoría el diseño es realizado a partir del conocimiento de las propiedades de la lámina, de manera que solo se podrán variar los parámetros geométricos del laminado a partir de la modificación de la orientación de las capas que éste contenga y del sándwich a partir del espesor del núcleo que sea asignado.

Los casos 4 y 5, los cuales constituyen esta categoría y son identificados por el color azul de sus gráficos, corresponden a una configuración final del material compuesto de laminado y sándwich respectivamente.

- ***Categoría sándwich***

Por último, en esta categoría, la cual es equivalente al último caso de diseño y es identificada con el color verde, el usuario debe digitar las propiedades mecánicas del laminado, sólo siendo posible la variación del valor del espesor de la piel superior e inferior y del núcleo.

4.1.2. Estructura lógica

La secuencia lógica general de ARCUM es dividida en tres módulos: el diseño del material compuesto, el modelado de la placa que soportará la carga externa, y la obtención de los resultados numéricos y gráficos especificados como las salidas en el Anexo 3; por lo que se debe tener en cuenta la categoría y el caso de diseño, de modo que las variables ingresadas por el usuario varían de acuerdo con la configuración inicial del material compuesto y las variables calculadas varían de acuerdo con la configuración final.

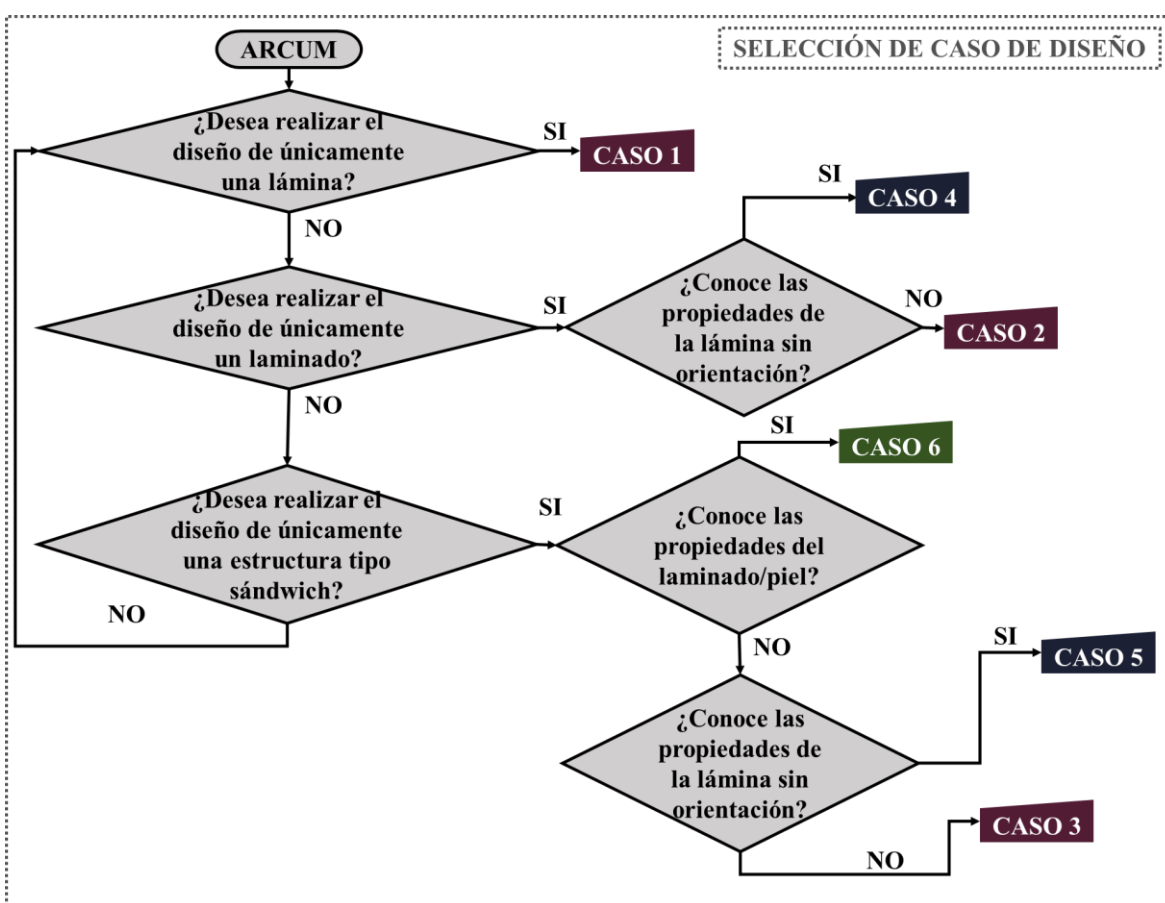


Figura 17 Diagrama de flujo para la selección de casos de diseño en ARCUM

Dado que la ejecución del código de ARCUM inicia una vez sean ingresados por el usuario los valores de las variables estipuladas en el Anexo 3 para cada caso de diseño;

y que, como se mencionó en la sección anterior, los casos pertenecientes a las categorías de lámina, laminado y sándwich se encuentran identificados con los colores morado, azul y verde respectivamente, en la Figura 17, se muestra el algoritmo básico de selección del caso de acuerdo con la finalidad que el estudio a realizar posea.

Para ello el usuario debe seguir el proceso de cuestionamiento, determinando la configuración del material al que desea aplicar la carga normal y si son existentes o no las variables a partir de recursos adicionales, como libros o análisis experimentales previos.

- **Módulo de diseño del compuesto.**

Una vez sea seleccionado el caso de diseño, se especifican dos tipos de diseño del compuesto: el diseño de una lámina y el diseño de un laminado.

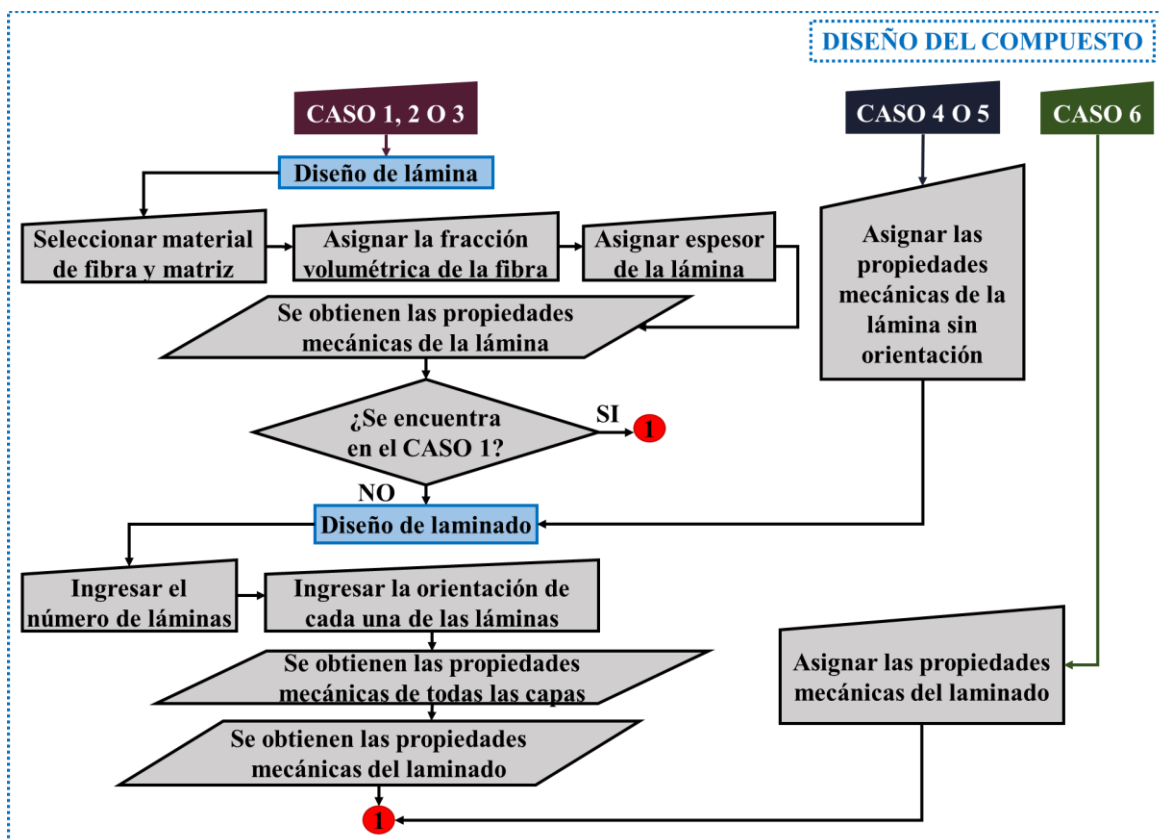


Figura 18 Diagrama de flujo del módulo de diseño de compuesto ejecutado por ARCUM

El algoritmo del código computacional para el cálculo de propiedades mecánicas de una lámina y un laminado es expuesto en la Figura 18, el cual describe el proceso de cada caso de diseño y define su finalización con el número 1 rojo, que representa el siguiente módulo a ejecutar: el modelado de la placa.

a) Diseño de lámina.

Para realizar el diseño de una lámina se tuvieron en cuenta dos tipos de análisis: el análisis micromecánico y el análisis macromecánico (Kaw, 2006); el primero, es realizado partiendo de la selección de materiales tanto de la fibra como de la matriz y la fracción volumétrica para realizar el cálculo de las propiedades mecánicas de la lámina, y el segundo para determinar las mismas a un ángulo de orientación específico.

En la Tabla 1 se definen el módulo de Young longitudinal, la relación de Poisson, la gravedad específica y el esfuerzo último de tensión axial para los materiales de fibra y matriz disponibles para el diseño de láminas en ARCUM (Gay, Hoa, & Tsai, 2003), aunque se encuentra habilitado el espacio de ingreso de datos de acuerdo con la referencia específica que se requiera analizar.

Tabla 1 Propiedades mecánicas de fibras y matrices para el diseño de una lámina (Gay, Hoa, & Tsai, 2003)

Propiedad		Módulo longitudinal [MPa]	Relación de Poisson	Gravedad específica	Esfuerzo último [MPa]	Cortante último [MPa]
Material de la fibra	Vidrio [E-Glass]	71000	0,22	2,45	400	80
	Carbono [AS4]	230000	0,3	1,75	500	90
	Kevlar [Kevlar 49]	70300	0,35	1,44	420	60
Material de la matriz	Epóxica	4500	0,4	1,2	130	-
	Poliéster	2900	0,38	1,2	80	-
	Poliamida	4000	0,35	1,4	70	-

Cabe resaltar que el código computacional de este módulo es mostrado en el Anexo 1 entre las líneas 2 y 156, mientras que la correspondiente descripción del funcionamiento de la interfaz gráfica para el diseño de la lámina se encuentra en entre los numerales 2 y 7 del Anexo 2.

Dado que los tejidos planos de fibras de carbono, kevlar o vidrio son realizados por la intersección perpendicular de fibras unidireccionales; en caso de no contar con las propiedades del tejido es posible aproximar su comportamiento en el plano x – y propuesto en la Figura 13, a partir de la superposición de las fibras a 0° y 90° (Gay, Hoa, & Tsai, 2003).

Para ello debe ser ejecutada la regla de las mezclas con el fin de determinar los módulos de elasticidad longitudinal y transversal, la relación de Poisson y el módulo cortante de una lámina con fibras unidireccionales a 0°, para que posteriormente sean corregidas por el factor de relacion entre las fibras a 0° y 90°.

Esta regla parte de la selección de las propiedades mecánicas de la fibra y la matriz, que en este caso son las seleccionadas por el usuario como se observa de la línea 3 a la 42 del Anexo 1 y en el numeral 2 del Anexo 2; y de los valores asignados por el usuario para la fracción volumétrica de la fibra y el espesor de la lámina, para posteriormente calcular la fracción volumétrica de la matriz y las densidades de la fibra y la matriz, por medio de las ecuaciones (6) y (7).

$$V_m = 1 - V_f \quad (6)$$

$$\rho_f = \rho_{r_f} * 1000 \quad ; \quad \rho_m = \rho_{r_m} * 1000 \quad (7)$$

Por medio de la ecuación (8) se calcula la densidad de la lámina, en función de las fracciones volumétricas definidas anteriormente, para determinar las fracciones másicas de la fibra y la matriz de acuerdo con la ecuación (9). Estas propiedades son ejecutadas desde la línea 43 y 81 del Anexo 1 y son mostradas en el panel de propiedades mecánicas, representado con el numeral 4 del anexo 2.

$$\rho_L = (\rho_f V_f) + (\rho_m V_m) \quad (8)$$

$$M_f = \frac{\rho_f}{\rho_L} V_f \quad ; \quad M_m = \frac{\rho_m}{\rho_L} V_m \quad (9)$$

Posteriormente, se realiza el cálculo de las propiedades mecánicas de la lámina, partiendo de las ecuaciones (10) y (11), en las cuales se obtienen los valores de los módulos de Young longitudinal y transversal, dependientes de la fracción volumétrica y de las propiedades de la Tabla 1.

$$E_{1L} = (E_{1f} * V_f) + (E_{1m} * V_m) \quad (10)$$

$$E_{2L} = E_{1m} \left[\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_{1m}}{E_{1f}} V_f} \right] \quad (11)$$

Adicionalmente, se determina la relación de Poisson longitudinal, cuya relación con la fracción volumétrica de la fibra y la matriz se encuentra descrita en la ecuación (12).

$$v_{12L} = v_{12f} V_f + v_{12m} V_m \quad (12)$$

Una vez se determine la relación de Poisson longitudinal, se calcula el módulo cortante de la fibra y la matriz, en función de sus correspondientes módulos de Young longitudinales y sus relaciones de Poisson, como se muestra en la ecuación (13) y,

partiendo de dichos valores, se encuentra el módulo cortante de la lámina por medio de la ecuación (14).

$$G_{12f} = \frac{E_{1f}}{2(1 + \nu_{12f})} \quad ; \quad G_{12m} = \frac{E_{1m}}{2(1 + \nu_{12m})} \quad (13)$$

$$G_{12L} = G_{12m} \left[\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{G_{12m}}{G_{12f}} V_f} \right] \quad (14)$$

Cabe resaltar que de la ecuación (10) a la (14) se plantea la predicción del comportamiento de una lámina unidireccional, por lo que es necesario recalculer dichas propiedades teniendo en cuenta que, como se mencionó en la sección 1.5.2., el tipo de fibras que serán tenidas en cuenta por ARCUM son netamente bidireccionales. Este recálculo del modelo micromecánico para los tejidos planos se encuentra definido por un factor k que, como se observa en la ecuación (15), relaciona la cantidad de hilos por metro en la dirección horizontal, con respecto a la vertical, al encontrarse entrelazados y orientados de manera perpendicular.

$$k = \frac{\# \text{ Hilos en la dirección horizontal}}{\# \text{ Hilos en la dirección horizontal} + \# \text{ Hilos en la dirección vertical}} = 0,5 \quad (15)$$

Con el fin de generalizar dicho análisis, se parte de la consideración de un tejido balanceado, es decir, cuyo factor k equivale a 0,5 al poseer la misma cantidad de hilos en ambas direcciones (Gay, Hoa, & Tsai, 2003). Teniendo en cuenta la anterior apreciación, se procede a computar el módulo de Young longitudinal, que a su vez será igual al transversal, a partir de los mismos conceptos ya calculados para una lámina unidireccional

como se muestra en la ecuación (16), con las modificaciones proporcionadas por el factor k .

$$E_{1L} = E_{2L} = (k E_{1L}) + ((1 - K)E_{2L}) \quad (12)$$

De igual manera, a partir de la ecuación (16), se computan los valores mayor y menor de la relación de Poisson, valor que representan la relación entre el esfuerzo longitudinal contra la deformación transversal. Debido a que el tipo de fibra en cuestión es bidireccional, el comportamiento en ambas direcciones es igual, como se observa en la ecuación (17). Adicionalmente se destaca que el módulo cortante es el único valor que no debe ser adecuado a dicha consideración.

$$v_{12L} = v_{21L} = \frac{v_{12L}}{\left(k + \left((1 - k) \frac{E_{1L}}{E_{2L}} \right) \right)} \quad (17)$$

Al finalizar el cálculo de estos parámetros se procede a mostrar en el panel de lámina sin orientación, identificado con el numeral 5 en el Anexo 2, los módulos de Young longitudinal y transversal recalculados, la densidad de la lámina calculada previamente y las relaciones de Poisson mayor y menor; ya que son estas propiedades mecánicas las correspondientes a una lámina ubicada a 0 o 90 grados con respecto al eje x , es decir en la dirección longitudinal del sistema de referencia de la Figura 12 en la sección 2.1.1.

Por otro lado, el análisis macromecánico de la lámina parte de los resultados de la sección anterior, implementando la forma generalizada de la ley de Hooke para una lámina cuyas fibras se encuentran orientadas un ángulo θ del eje longitudinal (Kaw, 2006).

Este tipo de análisis es aplicable tanto para láminas unidireccionales como bidireccionales, donde las propiedades mecánicas se encuentran en función de θ , cuyo

código computacional se define entre la línea 104 y la 136 del Anexo 1, serán descritas a continuación. En primer lugar, se deben tener en cuenta los términos de la matriz de transformación con la que predice el comportamiento en determinado ángulo a partir de dos funciones básicas trigonométricas como se observa en la ecuación (18).

$$s = \text{sen}(\theta) \quad ; \quad c = \text{cos}(\theta) \quad (18)$$

Considerando las relaciones anteriores, se plantea la ecuación (19), que define el módulo de elasticidad como una función dependiente de las propiedades de la lámina sin orientación alguna.

$$E_{xx} = \frac{1}{\frac{1}{E_{1L}}c^4 + \left(\frac{1}{G_{12L}} - \frac{2\nu_{12L}}{E_{1L}}\right)s^2c^2 + \frac{1}{E_{2L}}s^4} \quad (19)$$

La función anterior en una lámina bidireccional posee un comportamiento como el mostrado en la Figura 19, proporcionando el mayor módulo de elasticidad a cero y noventa grados de orientación debido a que las fibras se encuentran perpendiculares entre ellas.

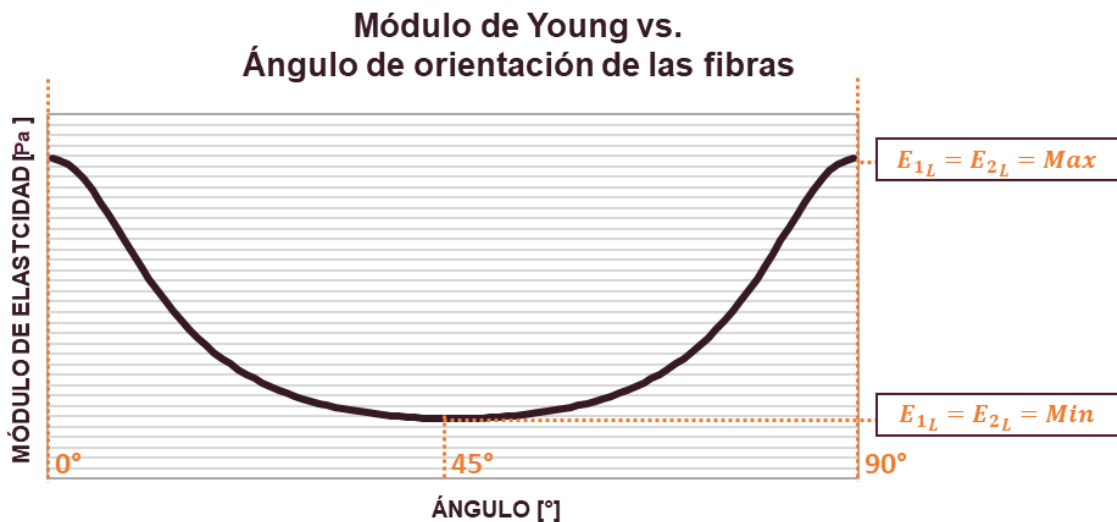


Figura 19 Variación del módulo longitudinal y transversal en función del ángulo de orientación de las fibras

Asimismo, la relación de Poisson se encuentra definida en la ecuación (20) y su comportamiento se muestra en la Figura 20, notándose una curva inversa a la del módulo de Young, y siendo mínima cuando las fibras están orientadas cero y noventa grados.

$$v_{xy} = E_{xx} \left[\frac{v_{12L}}{E_{1L}} (s^4 + c^4) - \left(\frac{1}{E_{1L}} + \frac{1}{E_{2L}} - \frac{1}{G_{12L}} \right) s^2 c^2 \right] \quad (20)$$

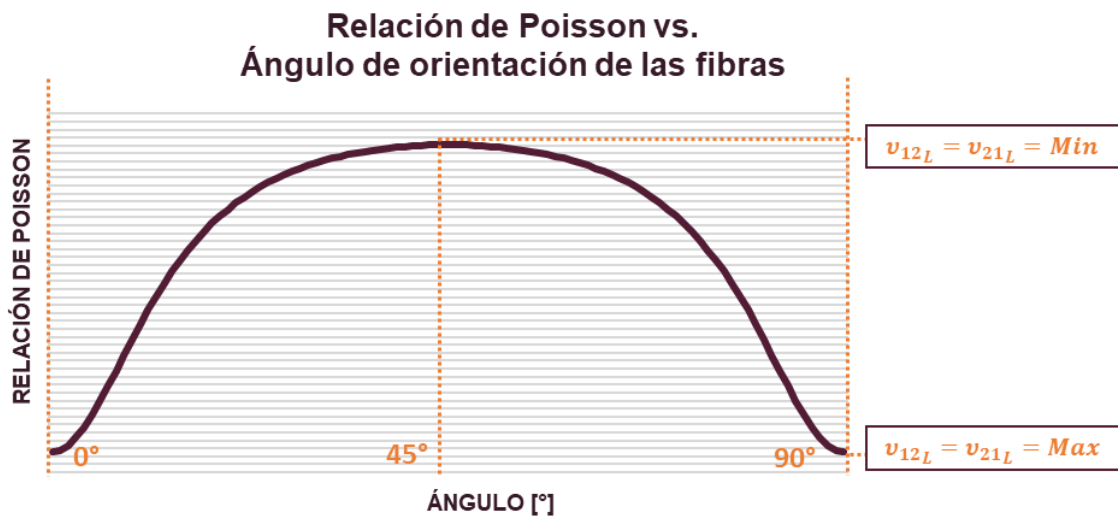


Figura 20 Variación de la relación de Poisson mayor y menor en función del ángulo de orientación de las fibras

Por último, el comportamiento del módulo cortante en función del ángulo de orientación de las fibras definido en la ecuación (21) se muestra en la Figura 21, en la cual se evidencia una variación similar al parámetro anterior, localizándose el valor mínimo en cero y noventa grados.

$$G_{xy} = \frac{1}{2 \left(\frac{2}{E_{1L}} + \frac{2}{E_{2L}} + \frac{4 v_{12L}}{E_{1L}} + \frac{1}{G_{12L}} \right) s^2 c^2 + \frac{1}{G_{12L}} (s^4 + c^4)} \quad (21)$$

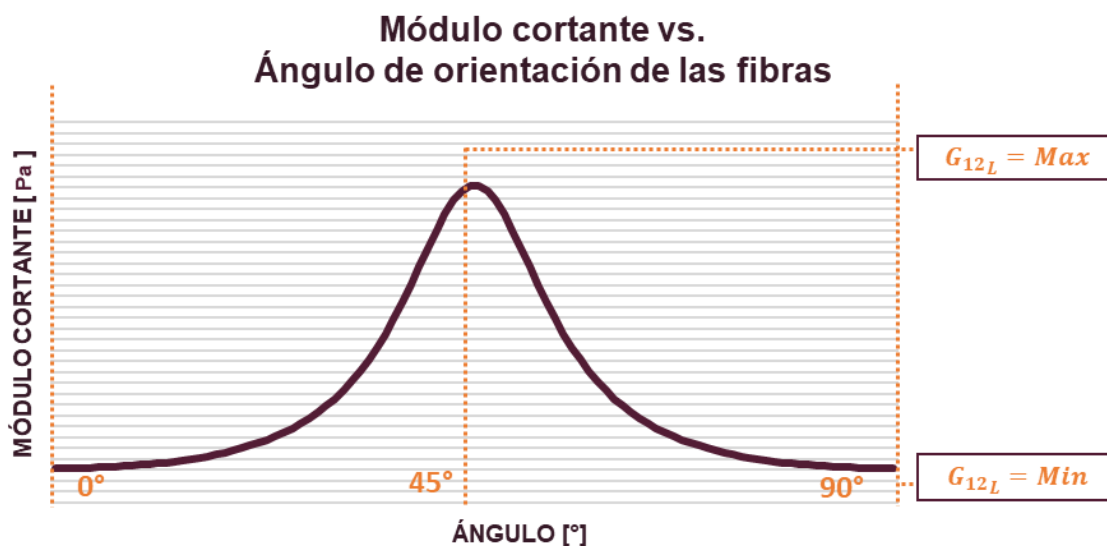


Figura 21 Variación del módulo cortante en función del ángulo de orientación de las fibras

Cabe resaltar que de acuerdo con la Figura 19, la Figura 20 y la Figura 21, las propiedades mecánicas de una lámina de fibras bidireccionales poseen el menor rendimiento cuando éstas se encuentran orientadas a 45° con respecto al eje longitudinal de referencia.

Una vez realizado el cálculo de las variaciones de dichos parámetros, éstas gráficas son mostradas en el panel de variación, identificado con numeral 6 del Anexo 2, para permitir la visualización de posibilidades de acuerdo con la aplicación de la lámina y, al obtener la entrada del ángulo deseado de la ésta, se muestran los valores correspondientes en el panel de lámina final identificado el numeral 7 del Anexo 2.

b) Diseño de laminado.

Como se mencionó en la sección 4.1.1 y, como se puede observar en la Figura 17, el diseño del laminado se puede llevar a cabo de dos maneras distintas: a partir de los datos del módulo anterior, es decir el diseño de la lámina por medio de ARCUM (caso 2 y 3) o

ingresando los valores ya existentes de una lámina bidireccional a partir de los cuales se quiera realizar el laminado (casos 4 y 5).

En la presente sección se expondrá el modelo matemático utilizado para el diseño de un laminado, independientemente de la forma de obtención de las constantes de ingeniería de la lámina ni el valor de su espesor, cuyo código computacional se encuentra comprendido entre las líneas 157 y 326 del Anexo 1.

Cabe resaltar que, como se mencionó en la sección 1.5.2, el análisis realizado para la configuración de laminado es de tipo macromecánico, sin realizar predicciones del comportamiento interno del laminado. Adicional a las propiedades mecánicas de la lámina que será utilizada para diseñar el laminado, se requiere el número de placas que formarán al mismo y su correspondiente ángulo de orientación, siendo entradas adicionales para permitir la variación de resultados.

En primer lugar, se ingresa el número de láminas, para posteriormente permitir determinar por parte del usuario el mismo número de entradas de ángulos de orientación, por medio del panel de configuración de las capas, como se observa en los numerales 8 y 9 del Anexo 2 y, así calcular y mostrar, tanto las propiedades de cada una de las láminas en el panel de propiedades de las capas, como las propiedades mecánicas del laminado final en el panel de propiedades del laminado identificados con los numerales 11 y 12 del Anexo 2, respectivamente.

Por medio de la ecuación (22), se calcula el espesor total del laminado, el cual depende del número de láminas, del espesor de cada una de ellas y el espesor del plano medio que equivale a un medio del espesor total. A continuación, ARCUM realiza un

proceso cíclico, comprendido entre las líneas 226 y 229 del Anexo 1, para determinar el valor del espesor para cada capa del laminado.

$$t_{TL} = t_L N_{TL} \quad ; \quad t_{1/2} = \frac{t_{TL}}{2} \quad (22)$$

En la Figura 22 se destaca que la primera capa o lámina es aquella que se encuentra en la cara inferior del laminado y, la última, en la cara superior del mismo; sin embargo, para hallar el espesor de cada capa, se toma como eje de referencia el plano medio, contando con espesores positivos para las láminas que se encuentren por encima y negativos para los que se encuentren por debajo de éste; para ello se recurre a la diferencia planteada en la ecuación (23), evaluada para cada número de lámina y ordenada de menor a mayor para obtener el vector de espesores.

$$t_a = t_{\frac{1}{2}} - t_{TL} |_1^{N_{TL}} \quad (23)$$

Por otro lado, la ecuación (24) , plantea la creación de la matriz de conformidad S_{ij} de una lámina, a partir de sus propiedades mecánicas.

Dicha matriz describe las relaciones de esfuerzo-deformación de determinado material en dos dimensiones y, además, su inversa equivale a la matriz de rigidez reducida Q_{ij} , la cual es necesaria para determinar el valor de las propiedades mecánicas del laminado final, es decir los módulos de Young longitudinal y transversal, el módulo cortante y la relación de Poisson (Kaw, 2006).

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1L}} & \frac{-\nu_{12L}}{E_{1L}} & 0 \\ \frac{-\nu_{12L}}{E_{1L}} & \frac{1}{E_{2L}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12L} \end{bmatrix} ; \quad Q_{ij} = [S]^{-1} \quad (24)$$

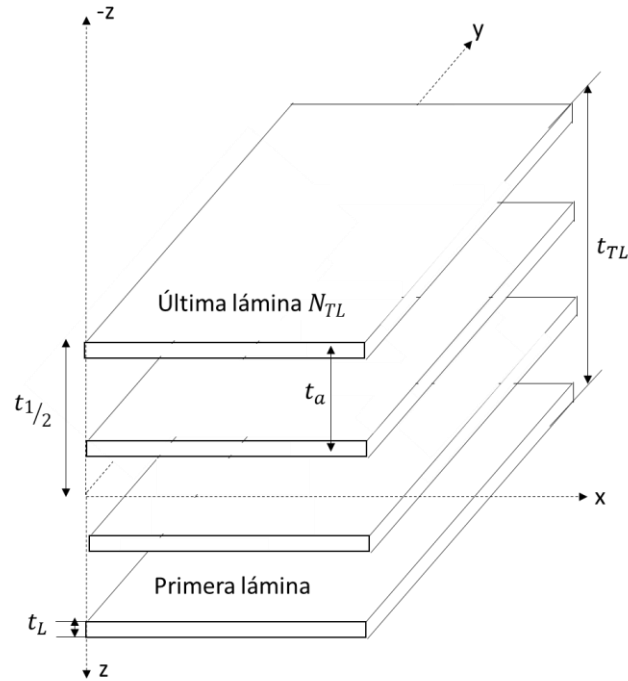


Figura 22 Esquema de referencia de un laminado

Después de crear la matriz anterior, se determina el valor de las propiedades mecánicas para cada lámina al ángulo ingresado correspondiente a la posición del laminado definida por el usuario, a partir de las ecuaciones (19), (20) y (21), para luego ser almacenadas en vectores y mostradas en la interfaz, específicamente en el numeral 11 del Anexo 2.

Posteriormente, se constituye la matriz \overline{Q}_{ij} a partir de coeficientes que dependen de la matriz Q_{ij} y los factores de transformación en función del ángulo de orientación de las fibras: c y s , de manera que, como lo expone el conjunto de ecuaciones (y se muestra de

la línea 270 a la 288 del anexo 1; la creación de esta matriz debe realizarse para cada una de las capas que componen el laminado de acuerdo con el ángulo respectivo ingresado, el cual también es graficado por ARCUM en el panel de vista previa del laminado identificado con el numeral 12 del Anexo 2.

$$\overline{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^2) \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(c^4 + s^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Posteriormente, y como lo muestra la ecuación (26), se conforma la matriz de rigidez plana, la cual relaciona las fuerzas resultantes presentes en el plano y las deformaciones en el mismo y, en función de dicha matriz, se definen las propiedades mecánicas del laminado, obteniendo las constantes de ingeniería.

$$A_{ij} = \sum_{a=1}^{N_{TL}} [\overline{Q}_{ij}]_a (t_a - t_{a-1}) \quad (26)$$

La expresión anterior refleja el proceso repetitivo de la multiplicación de la matriz \overline{Q}_{ij} de cada lámina a determinado ángulo, por la diferencia entre el espesor de la lámina a , que es la lámina en cuestión, y la anterior; siendo a la variable que cambia en orden

ascendente desde la primera lámina hasta el número máximo de capas ingresadas por el usuario.

Finalmente, t hace referencia al espesor de las láminas que se encuentren incluidas en el proceso cíclico. Por último, los módulos de Young longitudinal y transversal, la relación mayor de Poisson y el módulo cortante, son hallados a partir del conjunto de ecuaciones (27), relacionando los coeficientes de la inversa de la matriz A^*_{ij} y el espesor total del laminado.

$$E_{1La} = \frac{1}{t_{TL} A^*_{11}} \quad ; \quad E_{2La} = \frac{1}{t_{TL} A^*_{22}} \quad ; \quad \nu_{12La} = -\frac{A^*_{12}}{A^*_{11}} \quad ; \quad G_{12La} = \frac{1}{A^*_{66}} \quad (27)$$

▪ ***Módulo de modelado de la placa.***

De manera similar al módulo de diseño del laminado, el modelado de la placa puede ser desarrollado a partir del cálculo de las propiedades mecánicas realizado por ARCUM o el ingreso de estas directamente por el usuario.

En esta sección será descrito el modelo matemático utilizado por el módulo de modelado de la placa, cuyo algoritmo es mostrado en la Figura 23, en donde se representa la secuencia que maneja ARCUM, desde el diseño del compuesto realizado de acuerdo con el caso, hasta la asignación del valor y tipo de carga transversal a la cual es sometida.

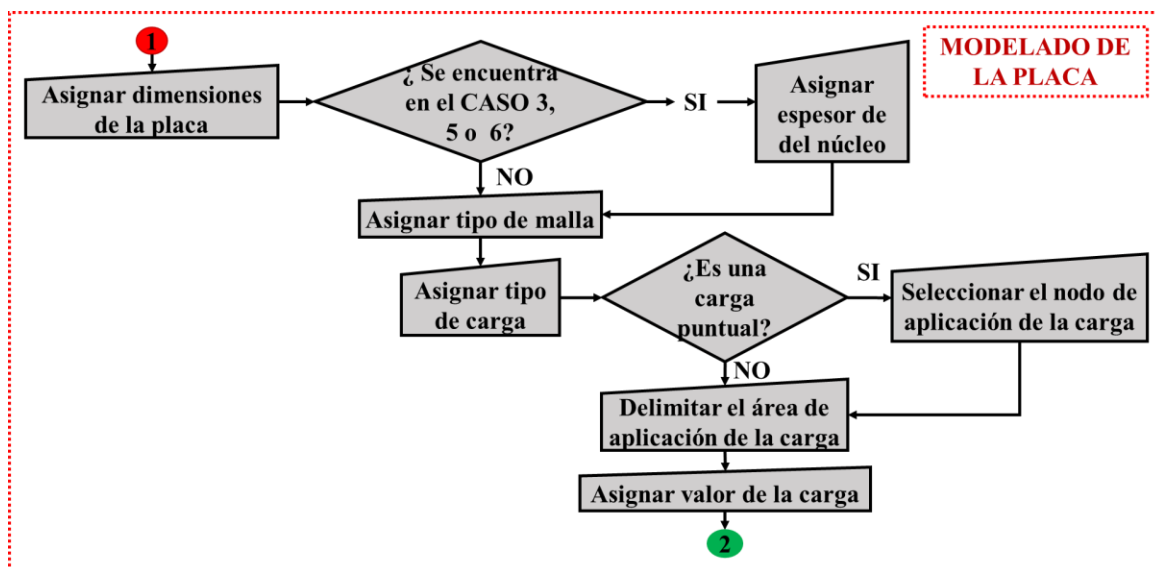


Figura 23 Diagrama de flujo para el módulo de modelado de la placa ejecutado por ARCUM

En primer lugar, son asignadas las dimensiones A y B, siendo el ancho y largo de la placa respectivamente, como se observa en el numeral 14 del Anexo 2 y, si se trata de los casos 3, 5 o 6 que implican el diseño de una estructura tipo sándwich, es ingresado el espesor del núcleo desde el plano medio, debido a que esta configuración posee las mismas características en espesor y propiedades mecánicas de las pieles y, por ende, posee una simetría sobre este plano.

Posteriormente y partiendo del conocimiento de las propiedades mecánicas del compuesto que desea evaluarse, de las dimensiones proporcionadas por el usuario a la aplicación y teniendo en cuenta que el método de diferencias finitas es dependiente del número de nodos de la malla, y ésta a su vez, dependiente del número de divisiones laterales que sean definidas, se conciben tres tipos enmallado de la placa localizados en el numeral 15 del Anexo 2, los cuales corresponden a 8, 10 y 12 divisiones uniformes a cada lado de la placa de dimensiones D_x y D_y .

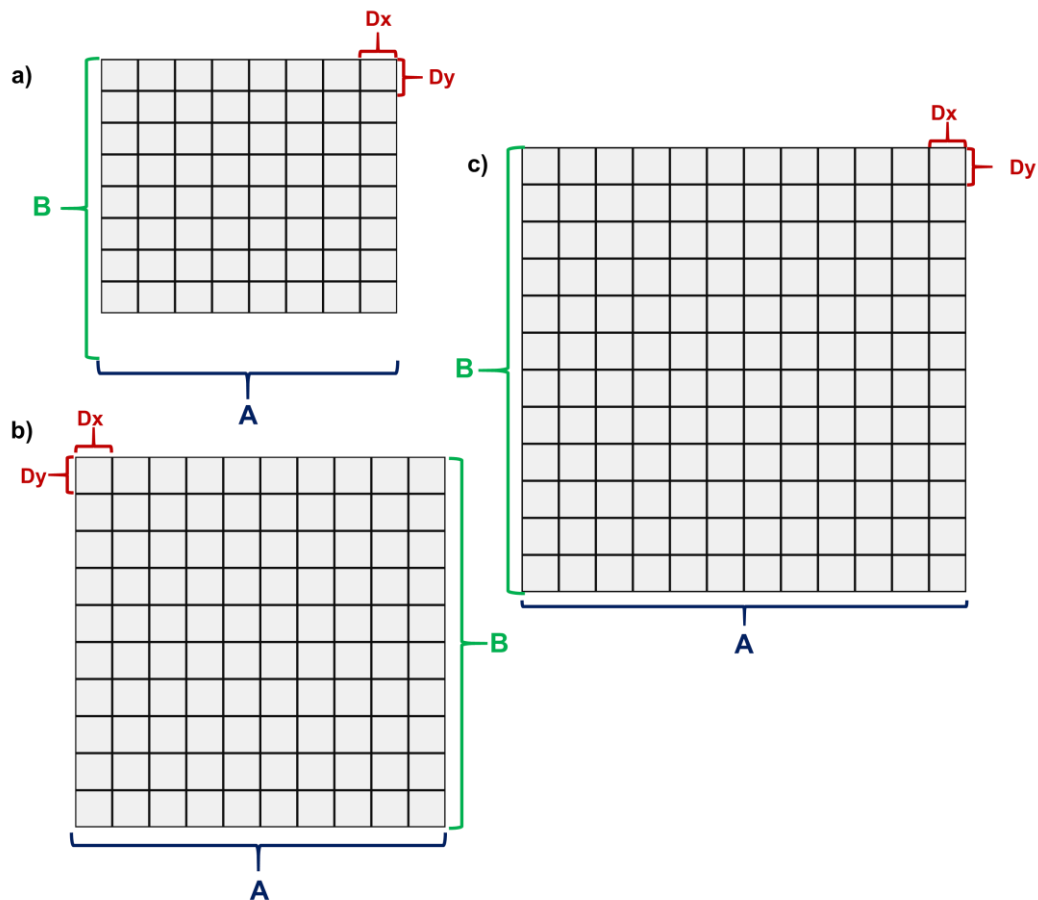


Figura 24 Esquemas de las mallas disponibles en ARCUM. a) Fina b) Media c) Gruesa

Se debe tener en cuenta que estos valores surgen a partir del número de divisiones utilizadas por los diversos autores consultados, encontrándose, lateralmente, un número de elementos desde 6 hasta 20; sin embargo esta misma bibliografía confirma la aproximación a la solución con una malla de aproximadamente 10 x 10 elementos, por lo que se optó por adicionar o sustraer dos elementos para afinar o engrosar la malla, respectivamente (Ezeh, Ibearugbulem, & Onyechere, 2013), como se observa en la Figura 24.

Una vez sea seleccionado el tipo de malla, se calcula el número de nodos laterales con los que cuenta la placa y los espaciamientos horizontales y verticales, que definen el tamaño de cada uno de los elementos de la malla, los cuales están compuestos por cuatro

nodos, uno en cada esquina del elemento, y pueden ser hallados a partir del conjunto de ecuaciones (28).

$$\Pi = p + 1 \quad ; \quad \Delta x = \frac{A}{p} \quad ; \quad \Delta y = \frac{B}{p} \quad (28)$$

Posteriormente es mostrado el espesor total de la placa, el cual varía de acuerdo con el caso de diseño, es decir la configuración final que esta posea al momento de realizar el análisis. La expresión aplicable para cada caso de diseño se encuentra descrita en el conjunto de ecuaciones (29) de la Tabla 2. Adicionalmente se calcula la rigidez a la flexión de la placa a partir de los espesores definidos para cada caso de diseño de acuerdo con el conjunto de ecuaciones (30)

Tabla 2 Variación de expresiones matemáticas de acuerdo con el formato aplicable para cada caso

Variable	Caso 1	Caso 2 y 4	Caso 3, 5 y 6	Conjunto de ecuaciones
t_{PC}	$t_{PC} = t_L$	$t_{PC} = t_{TL}$	$t_{PC} = t_{TL} + t_{NS}$	(29)
D	$\frac{E_{1Lor} t_{PC}^3}{12(1 - \nu_{12Lor}^2)}$	$\frac{E_{1La} t_{PC}^3}{12(1 - \nu_{12La}^2)}$	$\frac{E_{1La} t_{PC} h^3}{2(1 - \nu_{12La} \nu_{21La})}$	(30)
h	-	-	$h = t_{NS} + t_{TL}$	(31)

Este factor es definido en general como se muestra en la ecuación (30) para los casos 1, 2 y 4 (Peery & Azar, 1982), partiendo de la expresión matemática proporcionada por la teoría de placas; sin embargo para los casos de diseño 3, 5 y 6, cuyo análisis de deformación incluye la configuración de una placa tipo sándwich, se adapta la ecuación considerando las mismas propiedades mecánicas de la piel inferior y superior y sus espesores, propiedades que son iguales de acuerdo a la sección 1.5.2., como del núcleo como lo muestra el coeficiente h de la ecuación (31) (Loughlan, 2004).

Esta última suposición surge debido a la diferencia, entre módulos de elasticidad de la piel y el núcleo, que, al haberse definido el núcleo como espuma de poliuretano, permite asumir que la estructura tipo sándwich posee las mismas propiedades mecánicas, al ser de mínimo un orden de magnitud menor, como se ve en la ecuación (32) (Gryzagoridis, Oliver, & Findeis, 2015).

$$E_{1N} \ll E_{1La} \quad ; \quad \frac{E_{1N}}{E_{1La}} > 10^{-1} \quad (32)$$

Una vez sea calculada la rigidez a la flexión, se calculan los coeficientes utilizados por el método de diferencias finitas, dados por la ecuación (33), para obtener la expresión generalizada de cada nodo a partir de la relación de aspecto de uno de los elementos de la malla y conformar el sistema de ecuaciones (Szilard, 2004).

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$$

$$F1 = 6 + 8\alpha + 6\alpha^2 \quad ; \quad F2 = 4\alpha(\alpha + 1) \quad ; \quad (33)$$

$$F3 = 4(\alpha + 1) \quad ; \quad F4 = 2\alpha \quad ; \quad F5 = \alpha^2$$

Por otro lado, después de generar y graficar la malla en el panel de vista previa de la malla, que se encuentra identificado con el numeral 16 del Anexo 2, se define el tipo de carga normal aplicada sobre la placa, seleccionándose entre una carga puntual y una distribuida y su valor ya sea en Newtons o Pascales, como se ve en el numeral 17 del Anexo 2. Al ser elegido el tipo de carga, ARCUM habilita por medio de una lista el panel correspondiente para ingresar, en el primer caso, el nodo en el que se encuentra aplicada la carga, o, en el segundo caso, la zona en la que se encuentra la misma, correspondiendo a los numerales 18 y 19 del Anexo 2, respectivamente.

Partiendo de la ecuación (34); **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que describe la constante de la ecuación diferencial en la teoría de placas, se determina el vector de fuerza F_{ij} la cual, dependiendo del tipo de carga seleccionado, variará sus coeficientes en los nodos en los que la fuerza sea aplicada.

Dado que las condiciones de frontera estipuladas en la sección 1.5.2. restringen el desplazamiento de los bordes de la placa, las constantes del vector F_{ij} para los nodos localizados en estas zonas serán iguales a cero; mientras que los nodos incluidos en la zona puntual o en el paralelogramo definido para la carga distribuida, contarán con el valor de \bar{P} en el vector mencionado.

$$\bar{P} = \frac{\frac{F}{\Delta x} \Delta y^3}{D} \quad (34)$$

El numeral 18 del Anexo 2 señala el panel de selección de nodo puntual el cual, al ser seleccionado, proporciona las coordenadas de este con respecto a placa.

De igual manera, el numeral 19 del mismo Anexo señala el panel para el ingreso de cuatro nodos que describen la zona en la que se aplicará uniformemente la carga, donde se debe ingresar los nodos como se muestra en la Figura 25 y, al proporcionar dicha información, ARCUM mostrará las coordenadas de estos cuatro nodos. Este proceso puede localizarse de la línea 538 a la 645 del ANEXO 1.

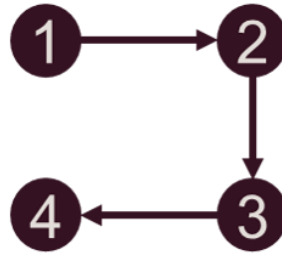


Figura 25 Secuencia para el ingreso de los nodos que describen la zona de carga distribuida

- ***Módulo de diseño de solución.***

En la Figura 26, se expone el algoritmo del módulo de resultados, en donde se representa la secuencia que maneja ARCUM, incluyendo los resultados gráficos y numéricos; entre los cuales se encuentran:

- Las gráficas de deformación de la placa en tres dimensiones.
- La gráfica del esfuerzo contra deformación en los módulos de lámina y laminado.
- La gráfica de la convergencia del modelo iterativo a partir del que se obtiene la solución.

Cada una de estas en una pestaña del panel de gráficos que es identificado con el numeral 24 del Anexo 2.

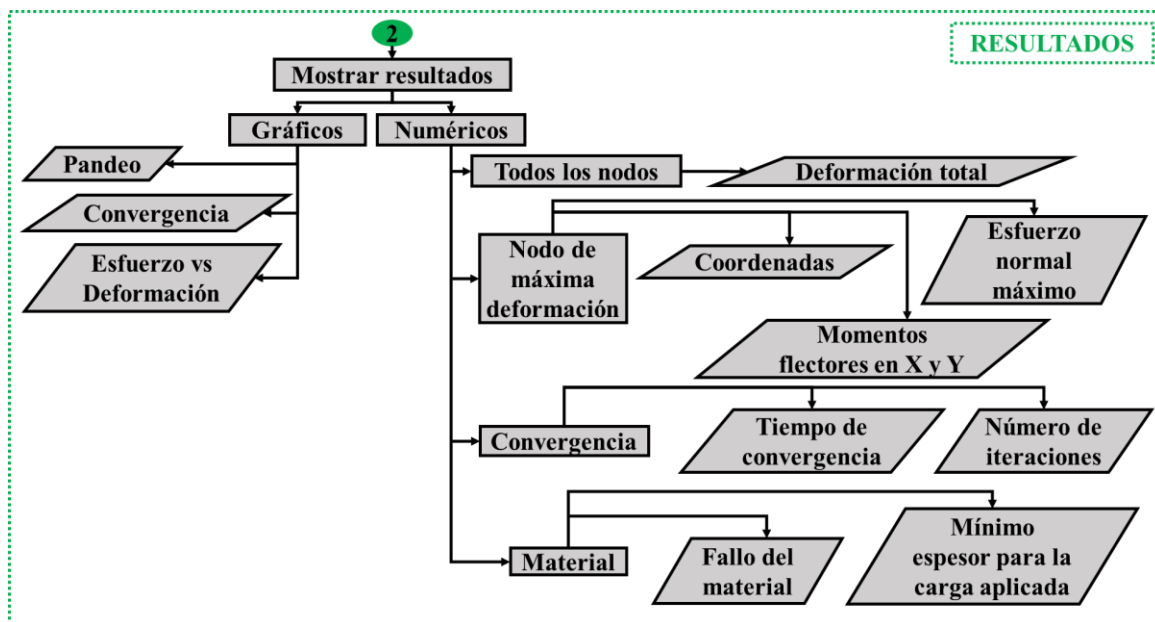
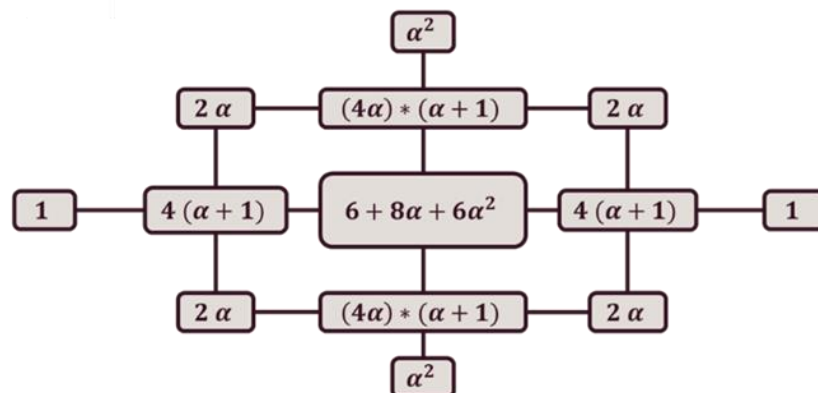


Figura 26 Diagrama de flujo para el módulo de resultados ejecutado por ARCUM

Por otro lado, los resultados numéricos correspondientes al nodo de máxima deformación, incluyendo además la deflexión, coordenadas, momentos y esfuerzos se encuentran representados por los numerales 22, 23, 24 y 25 del Anexo 2 respectivamente; adicionalmente se muestra el número y tiempo de las iteraciones que fueron requeridas para determinar la deformación de cada nodo, en el panel de iteraciones señalado por el numeral de 27 del mismo Anexo.

Por último, en el panel de deformación por nodo, representado por el numeral 26 el Anexo 1, se genera una tabla que proporciona la información referente a las coordenadas, número de nodo y deflexión de cada uno de los nodos existentes en la malla; mientras que en numeral 28 de este Anexo se indica si el material falla o no y muestra el mínimo espesor que requiere la placa para soportar la carga aplicada.

a)



b)

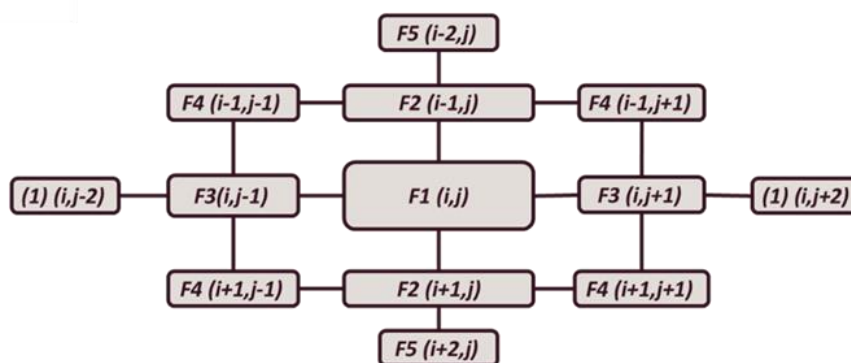


Figura 27 Estructura para la evaluación de coeficientes por nodo

Teniendo en cuenta los coeficientes $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ y $F5$, determinados en la anterior sección, se definen las variables de la matriz de deformación W_{ij} , donde i y j equivalen al número de nodos existentes en la placa; posteriormente se da inicio a la ejecución de la estructura lógica del método de diferencias finitas, por medio de la creación de las ecuaciones que conformarán la matriz K_{ij} , teniendo en cuenta la estructura de la Figura 27 que relaciona dichas constantes previamente halladas de acuerdo con la posición del nodo que se esté evaluando. El numeral a) especifica el cálculo de la ecuación (33) que debe ser utilizado de acuerdo a la posición en la matriz, teniendo en cuenta que el recuadro central representa el nodo (i, j) y, de acuerdo al numeral b), la variación de la posición verticalmente afecta a las filas, negativamente hacia arriba y positivamente hacia abajo,

mientras que la variación horizontal afecta a las columnas, negativamente hacia la izquierda y positivamente hacia la derecha (Dolicanin, Nikolic, & Dolicanin, 2010).

La Figura 28 muestra la disposición de los nodos en una placa de $\Pi x \Pi$, en donde el tamaño real de la placa se encuentra simbolizado y delimitado por los nodos de color rojo denominados bordes externos, los cuales al estar empotrados no poseen desplazamiento transversal y ni giros, es decir $W_{i,j} = 0$. Adicionalmente, los nodos fuera del contorno de la malla, denominados nodos ficticios, deben ser incluidos en los cálculos para resolver el modelo, por tal motivo la ecuación debe ser continua, proyectándose en los nodos ficticios correspondiendo a la misma magnitud pero en diferente sentido $W_{i,j} = -W_{i-1,j}$, es decir los nodos azules y naranjas con signo negativo (Peery & Azar, 1982).

Por lo anterior, la ecuación (35) generaliza la estructura de la Figura 27 (Dolicanin, Nikolic, & Dolicanin, 2010), la cual puede ser aplicada a los nodos de color verde de la Figura 28, denominados nodos internos; sin embargo debe ser modificada para las demás posiciones debido a que la deformación de los bordes y esquinas internas, identificados por el color azul y naranja con signo positivo, respectivamente.

$$F1 W_{(i,j)} - F2(W_{i-1,j} + W_{i+1,j}) - F3(W_{i,j+1} + W_{i,j-1}) + F4(W_{i-1,j+1} + W_{i+1,j+1} + W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1}) + F5(W_{i-2,j} + W_{i+2,j}) + W_{i,j-2} + W_{i,j+1} = F_{i,j} \quad (35)$$

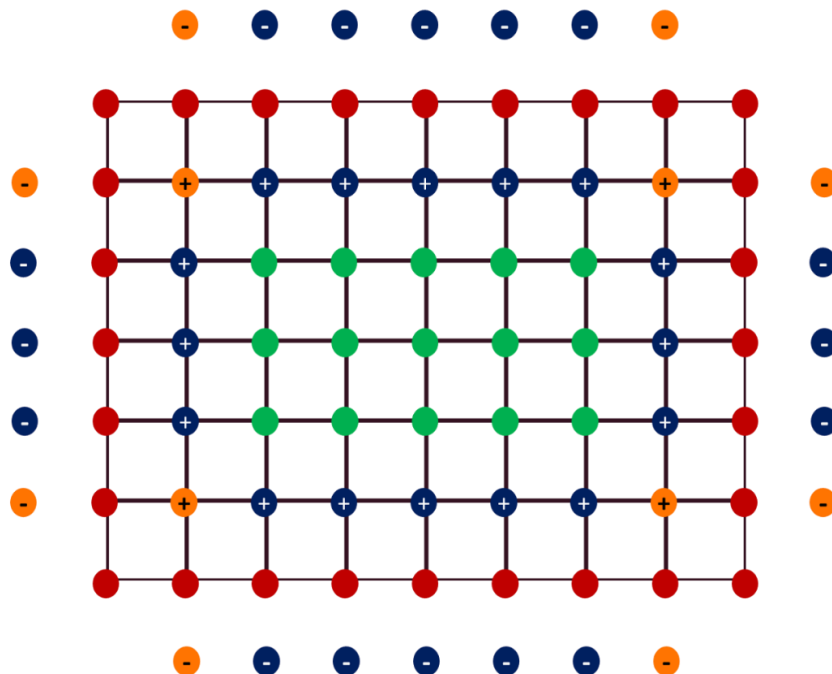


Figura 28 Condiciones de los nodos de acuerdo con su posición en la placa

En el Anexo 1, de la línea 658 a la 705, pueden observarse las expresiones de cada posición mostrados en la Tabla 3, donde el conjunto de ecuaciones (36) especifica los valores a reemplazar para cada una de las esquinas internas; mientras que el conjunto de ecuaciones (37) define los cambios para cada uno de los bordes internos.

Cabe resaltar que el código comprendido en las líneas mencionadas anteriormente plantea las expresiones previamente descritas como condicionales que, al estar dentro de un bucle, se evalúan de 1 a Π en i y j , ejecutando el que cumpla con las condiciones estipuladas.

Tabla 3 Modificaciones de la ecuación general de diferencias finitas de acuerdo con la posición del nodo

	Localización	Modificación	Conjunto de ecuaciones
Esquinas internas	Superior izquierda	$W_{i-2,j} = W_{i,j-2} = -W_{i,j}$	(36)
	Superior derecha	$W_{i-2,j} = W_{i,j+2} = -W_{i,j}$	

	Localización	Modificación	Conjunto de ecuaciones
Bordes internos	Inferior izquierda	$W_{i+2,j} = W_{i,j-2} = -W_{i,j}$	(37)
	Inferior derecha	$W_{i+2,j} = W_{i,j+2} = -W_{i,j}$	
	Superior	$W_{i-2,j} = -W_{i,j}$	
	Inferior	$W_{i+2,j} = -W_{i,j}$	
	Izquierdo	$W_{i,j-2} = -W_{i,j}$	
	Derecho	$W_{i,j+2} = -W_{i,j}$	

Posteriormente, se utiliza el método de Gauss Seidel, descrito en la sección 2.1.3. y contenido entre las líneas 707 y 745 del Anexo 1; partiendo de un valor permisible de error en la solución de $\Omega = 10^{-5}$, de la matriz K_{ij} de coeficientes y el vector F_{ij} de fuerza.

Convergencia de la solución



Figura 29 Gráfica de convergencia de la solución, graficada en el módulo de resultados.

Al finalizar el proceso iterativo, se grafica el número de iteraciones con respecto al error obtenido en la solución generando una gráfica con un comportamiento similar a la Figura 29, donde el valor absoluto del error entre la solución anterior y la actual va

disminuyendo a medida que aumenta el número de iteraciones, es decir la gráfica de convergencia.

Una vez generado el vector de deformación, se procede a graficar en tres dimensiones el estado final de la placa, utilizando la escala de color “Jet colormap” de MATLAB donde los valores máximos de deflexión son representados en color rojo y los mínimos en color azul, como se muestra en la Figura 30 y donde las unidades equivalen a metros.

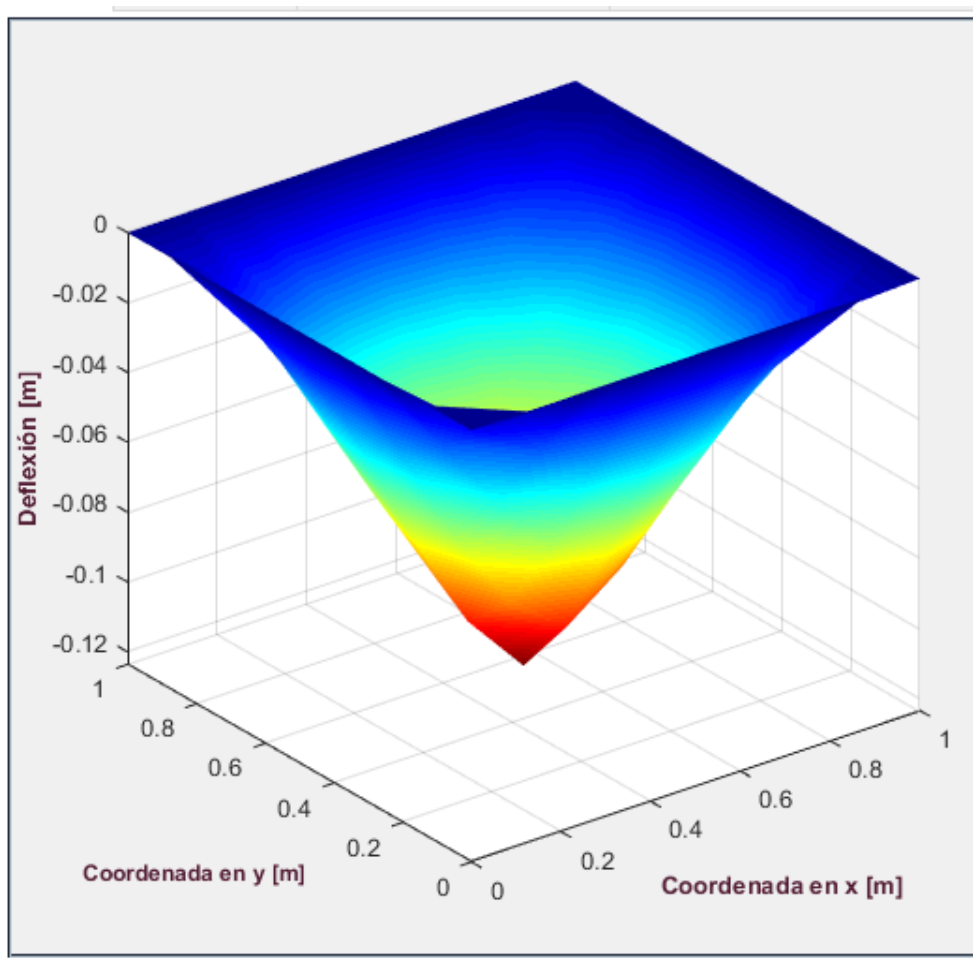


Figura 30 Gráfica en tres dimensiones de la deformación de la placa evaluada. ARCUM

Posteriormente se determina el nodo en el que se presentó la mayor deflexión ya que, al ser el punto crítico de la placa, es necesario conocer los momentos flectores y el esfuerzo máximo existente; para ello se utiliza el conjunto de ecuaciones (38) a partir del cual se halla el momento en x , en y y en xy (Barton, 1948).

$$M_x = -D \left[\frac{W_{(i,j+1)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i,j-1)}}{\Delta x^2} + \nu_{12} \frac{W_{(i+1,j)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i-1,j)}}{\Delta y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\nu_{12} \frac{W_{(i,j+1)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i,j-1)}}{\Delta x^2} + \frac{W_{(i+1,j)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i-1,j)}}{\Delta y^2} \right] \quad (38)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1 - \nu_{12})}{4\Delta x \Delta y} [W_{(i+1,j+1)} + W_{(i-1,j+1)} + W_{(i+1,j-1)} + W_{(i-1,j-1)}]$$

Contando con los valores **calculados** a partir del conjunto de ecuaciones (38), se determina el momento máximo por medio de la ecuación (39), el cual permitirá conocer el esfuerzo máximo descrito por la ecuación (40) (Barton, 1948).

$$M_{max} = \frac{1}{2} (M_x + M_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} (M_x - M_y) \right]^2 + M_{xy}^2} \quad (39)$$

$$\sigma_{max} = \frac{6M_{max}}{t_{cp}^2} \quad (40)$$

Este esfuerzo calculado será comparado con el esfuerzo último del material, ya sea ingresado o computado por medio del conjunto de ecuaciones (41) de la Tabla 4, que aplica para los casos 1, 2 y 3, para así determinar si la carga normal aplicada produce un fallo en el material de la placa (Gay, Hoa, & Tsai, 2003).

Tabla 4 Conjunto de ecuaciones para la determinación del esfuerzo último de láminas y laminados

Configuración del compuesto	Expresión	Conjunto de ecuaciones
Lámina	$\sigma_L = \sigma_f \left(V_f + ((1 - V_f) \frac{E_{1m}}{E_{1f}}) \right)$; $\sigma_{L90} = 0.74 \sigma_L$; $\sigma_P = \frac{\sigma_L + \sigma_{L90}}{2}$	(41)
Laminado y sándwich	$\sigma_\theta = \left(\frac{\sigma_L + \sigma_{L90}}{2} \right) + \frac{\sigma_L - \sigma_{L90}}{2} \cos 4\theta$; $\sigma_P = \frac{\sum_{a=1}^{N_{TL}} \sigma_\theta}{N_{TL}}$	

Posteriormente se gráfica la curva de esfuerzo contra deformación de la placa como la mostrada en la Figura 31, la cual se presenta como un ejemplo del comportamiento de gráficas de este tipo, teniendo en cuenta el módulo de elasticidad del material E_1 , el esfuerzo último σ_{max} y la deformación última del mismo ϵ_{max} (Jones, 1999).

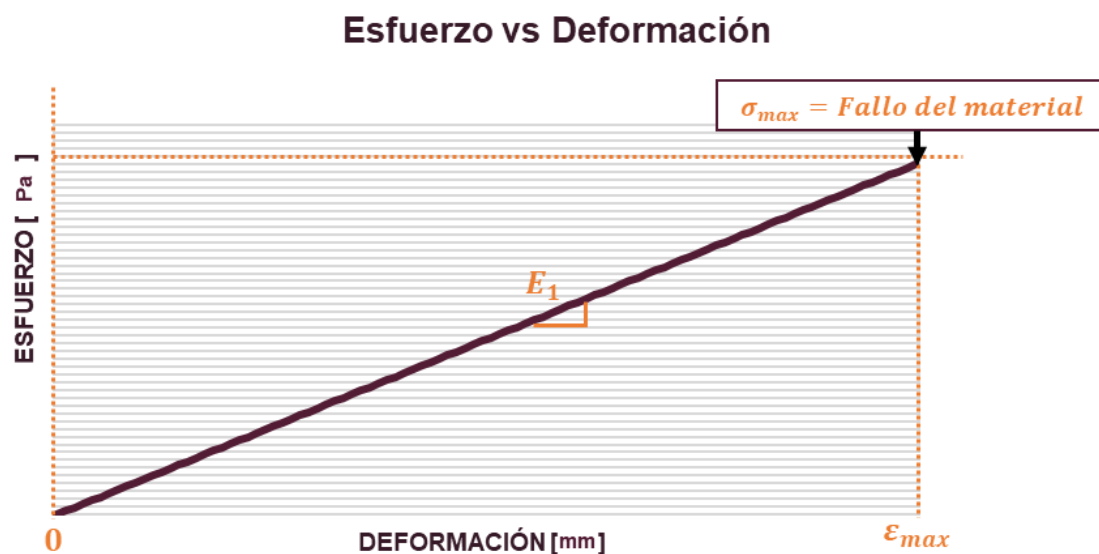


Figura 31 Gráfica de esfuerzo contra deformación graficada en el módulo de resultados.

Adicionalmente, es calculado el espesor mínimo que requiere la placa para soportar la carga (Hollman, 1983), como se describe en el conjunto de ecuaciones (42) de la Tabla 5, variando de acuerdo con la configuración del material compuesto en cuestión, ya sea

lámina, laminado o sándwich, destacando para este último que la densidad del núcleo es de 70 kg/m^3 debido a que se trata de espuma de poliuretano (ARTLUX EUROPA, 2018).

Tabla 5 Conjunto de ecuaciones para la determinación del espesor mínimo requerido para la carga aplicada

Configuración del compuesto	Expresión	Conjunto de ecuaciones
Lámina	$t_{min} = \sqrt{\frac{6 M_{max}}{\sigma_L}}$	
Laminado	$t_{min} = \frac{\sum_{a=1:N_{TL}} \sigma_{La}}{\sigma_{max}} t_L$	(42)
Sándwich	$t_{min} = \sqrt{\frac{4 M_{max} \rho_L}{A \sigma_{La} \rho_N}} \quad ; \quad \rho_N = 70 \text{ kg/m}^3$	

De manera complementaria y con el fin de proveer una base para futuros trabajos en la Universidad de San Buenaventura, se realiza el planteamiento matemático para determinar el margen de seguridad en los laminados. En primer lugar, se definen las deformaciones relacionadas a los esfuerzos a los que se encuentra sometida la placa, de acuerdo con la ecuación (43) de la teoría de placas (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{W_{(i+1,j)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i-1,j)}}{\Delta y^2} \right) * -t_{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{W_{(i,j+1)} - (2 W_{(i,j)}) + W_{(i,j-1)}}{\Delta x^2} \right) * -t_{\frac{1}{2}} \\ (W_{(i+1,j+1)} + W_{(i-1,j+1)} + W_{(i+1,j-1)} + W_{(i-1,j-1)}) * -t_{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Como puede observarse en la ecuación anterior, los esfuerzos y deformaciones se encuentran en función del espesor de la placa, y ya que el punto de interés de estudio es el que se encuentra en el nodo de mayor deformación en la cara inferior del laminado porque

se encuentra sometido al esfuerzo máximo; el espesor tomado en cuenta para este cálculo es el del plano medio.

Posteriormente es determinado el margen de seguridad de acuerdo con la ecuación (44) que relaciona, para las direcciones x y y, la resistencia última longitudinal de la fibra con las deformaciones calculadas con la ecuación (43) y el módulo de elasticidad de la fibra, mientras que para la dirección xy se relaciona la resistencia última cortante con el módulo cortante de la fibra (Hollman, 1983).

$$MS_1 = \frac{\sigma_f}{2 * \varepsilon_x * E_{1f}} - 1 ; MS_2 = \frac{\sigma_f}{2 * \varepsilon_y * E_{1f}} - 1 ; MS_{12} = \frac{\tau_f}{4 * \varepsilon_{xy} * E_{1f}} - 1 \quad (44)$$

▪ ***Caso ARCUM.***

Adicional a los casos mencionados anteriormente, ARCUM proporciona el caso ARCUM, el cual se caracteriza por tener únicamente las entradas requeridas por el método de diferencias finitas, siendo independiente del tipo de material, resolviendo a partir del módulo de elasticidad, relación de Poisson, dimensiones y cargas, y proporcionando las mismas salidas de los casos anteriores. Este módulo fue utilizado para la validación de resultados con la bibliografía consultada, la cual será expuesta en la siguiente sección.

5. Análisis de resultados

En esta sección se describirán las pruebas comparativas realizadas en ARCUM, determinando la exactitud de los resultados que influyen directamente en la deformación de una placa de material compuesto, es decir el cálculo de sus propiedades y la correspondiente solución a través del método iterativo propuesto en las secciones anteriores, dado que son los parámetros fundamentales que afectan los demás cálculos teóricos ya validados por los autores de la bibliografía consultada para el desarrollo de este proyecto.

En primer lugar, se expondrá la evaluación de los distintos casos de carga aplicada que puedan ejecutarse en la placa, ya sea puntual, distribuida sobre toda la placa o parcialmente distribuida; realizando a su vez el mismo análisis en el software ANSYS, proporcionado por la Universidad de San Buenaventura, sede Bogotá y calculando el porcentaje de error entre los resultados obtenidos.

En segundo lugar, se mostrará la comparación realizada entre ARCUM y dos de los documentos de la bibliografía consultada, incluyendo los trabajos de investigación realizados en la Universidad de San Buenaventura, sede Bogotá y en la Universidad Carlos III de Madrid.

5.1. Verificación de casos de carga

Teniendo en cuenta las diferentes formas de aplicación de cargas sobre la placa de análisis, se idearon tres casos cuyas condiciones permitieran corroborar los resultados obtenidos por ARCUM; siendo estos los fundamentales para la obtención de propiedades características del material y la solución del vector deformación; la cual es el objetivo principal de este proyecto. Adicionalmente, se buscó demostrar la correcta ejecución de todos los casos de diseño, implementando las tres configuraciones en los casos 1, 2 y 3.

El porcentaje de error entre resultados fue calculado a partir de la ecuación (45), teniendo en cuenta que el valor de referencia, para la validación del diseño de compuestos, fue el de la bibliografía, mientras que el tomado para la validación de deformación y esfuerzos máximos fue obtenido a través de ANSYS y, finalmente, el valor calculado en ambos casos fue el arrojado por ARCUM y mostrado en el módulo de resultados del mismo. También cabe aclarar que, dado que la malla cumple la función de refinar o no los resultados obtenidos en la solución, la validación de resultados será ejecutada con la malla más gruesa con el fin de obtener los resultados más generales y comprobar su exactitud aun con este número de divisiones.

$$Error = \frac{V_{Referencia} - V_{Calculado}}{V_{Referencia}} \quad (45)$$

5.1.1. Caso de carga puntual

Como se observa en la Figura 32, por medio del caso de diseño número 2, se llevó a cabo el diseño de una lámina constituida por fibra de vidrio y resina epóxica con una fracción volumétrica de la fibra de $V_f = 0,5$ en ARCUM. A partir de estas entradas, se obtuvieron las propiedades mecánicas del recuadro rojo de esta Figura 29, las cuales son mostradas en la Tabla 6 en contraste con las determinadas por el autor (Gay, Hoa, & Tsai, 2003), exponiendo el porcentaje de error entre los módulos elásticos longitudinal y transversal, el módulo cortante y la relación de Poisson.

Como se puede notar, el valor del error absoluto es similar para los módulos elásticos y cortante siendo este de 4%, mientras que para la relación de Poisson es mucho menor, siendo de 0.69%; destacándose la obtención de un valor por encima al real únicamente para el caso de los módulos de Young.

LÁMINA LAMINADO

SELECCIÓN DE MATERIAL

FIBRA

VIDRIO

CARBONO

KEVLAR

MATRIZ

POLIAMIDA

EPÓXICA

POLIESTER

CARACTERÍSTICAS DE LA LÁMINA

ESPESOR mm

MATERIALES

PROPIEDADES MECÁNICAS

	FIBRA	MATRIZ
FRACCIÓN VOLMÉTRICA	<input type="text" value="0.5"/>	0.5
MÓDULO DE ELASTICIDAD	7.1e+10 Pa	4.5e+09 Pa
GRAVEDAD ESPECÍFICA	2.45 kg/m ³	1.2 kg/m ³
RELACIÓN DE POISSON	0.22	0.4
DENSIDAD	2450	1200
FRACCIÓN MÁSCICA	0.671233	0.328767

LÁMINA SIN ORIENTACIÓN

MÓDULO LONGITUDINAL 2.07961e+10 Pa

MÓDULO TRANSVERSAL 2.07961e+10 Pa

DENSIDAD 1825 kg/m³

RELACIÓN MAYOR DE POISSON 0.124902

RELACIÓN MENOR DE POISSON 0.124902

CALCULAR

VARIACIÓN

MÓDULO LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL | MÓDULO CORTANTE | RELACIÓN DE POISSON

Módulo Longitudinal y Transversal de la Lámina vs Ángulo de Orientación

LÁMINA FINAL

MÓDULO LONGITUDINAL - Pa

MÓDULO TRANSVERSAL - Pa

MÓDULO CORTANTE - Pa

RELACIÓN MAYOR DE POISSON -

ÁNGULO DE ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS °

VER PROPIEDADES

Figura 32 Diseño de lámina del caso de carga puntual

Tabla 6 Comparación de constantes elásticas del caso de carga puntual

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Módulo de elasticidad [MPa]	2,00e+10	2,08e+10	3,9%
Módulo cortante [MPa]	2,85e+09	2,74e+09	4%
Relación de Poisson	0,13	0,125	0,69%

Una vez comparados y comprobada la validez de dichos parámetros, se realizó el diseño del laminado de cuatro capas dispuestas en una configuración $[90,45]_S$, como se observa en la Figura 33, en donde se resaltan con el recuadro rojo las propiedades obtenidas del compuesto simétrico final, es decir, las constantes que fueron utilizadas para el análisis de deformación, tanto en ANSYS como en ARCUM y, adicionalmente en el recuadro azul de esta Figura se destaca el espesor del laminado, el cual para este caso es equivalente al espesor total de la placa.

LÁMINA LAMINADO

LÁMINAS

CONFIGURACIÓN DE LAS CAPAS

NÚMERO DE LÁMINAS

ESPESOR TOTAL DEL LAMINADO mm

CALCULAR PROPIEDADES

N°	ÁNGULO [°]
1	90
2	45
3	45
4	90

PROPIEDADES DE LAS CAPAS

N°	1	2	3	4
MÓDULO LONGITUDINAL	2.0796e+10	9.6981e+09	9.6981e+09	2.0796e+10
MÓDULO TRANSVERSAL	2.0796e+10	9.6981e+09	9.6981e+09	2.0796e+10
MÓDULO CORTANTE	3.0460e+09	9.2435e+09	9.2435e+09	3.0460e+09
RELACIÓN DE POISSON	0.1249	0.5919	0.5919	0.1249

PROPIEDADES DEL LAMINADO

MÓDULO LONGITUDINAL 1.59849e+10 Pa MÓDULO CORTANTE 6.14479e+09 Pa

MÓDULO TRANSVERSAL 1.59849e+10 Pa RELACIÓN MAYOR DE POISSON 0.336563

VISTA PREVIA DEL LAMINADO

Figura 33 Diseño de laminado del caso de carga puntual

DIMENSIONES, MALLA Y CARGAS

DIMENSIONES

ANCHO DE LA PLACA **A** m

LARGO DE LA PLACA **B** m

ESPESOR DE LA PLACA mm

MALLA

TIPO DE MALLA ΔX 0.0625 m ΔY 0.04375 m

APLICACIÓN DE LA CARGA

TIPO DE CARGA APLICADA VALOR DE LA CARGA N

CARGA PUNTUAL		CARGA DISTRIBUIDA			
NODO	<input type="text" value="61"/>	NODO 1	<input type="text" value="1"/>	X	Y
COORDENADA		NODO 2	<input type="text" value="1"/>	X	Y
X	<input type="text" value="0.375"/>	NODO 3	<input type="text" value="1"/>	X	Y
Y	<input type="text" value="0.2625"/>	NODO 4	<input type="text" value="1"/>	X	Y

VISTA PREVIA

MALLA

Eje Y

Eje X

Figura 34 Modelado de la placa del caso de carga puntual

Posteriormente, se definieron las entradas de las dimensiones de ancho y largo de la placa, siendo estas 0.5 y 0.35 metros respectivamente, como se observa en el recuadro

verde de la Figura 34, así como también es señalado en negro y en el recuadro amarillo, el nodo 61 de una malla gruesa como el punto de aplicación de la carga puntual, de $P=100$ Newtons, aplicada en la esquina superior derecha de la placa, con coordenadas $(0.375,0.262)$.

Se debe destacar que este caso fue diseñado y ejecutado con el fin de garantizar el funcionamiento del código computacional aún sin existir simetría alguna al encontrarse aplicada una carga puntual en el medio de la placa a analizar, y poder ilustrar el comportamiento de la solución obtenido por ARCUM bajo cualquier carga situada en cualquier punto de la superficie.

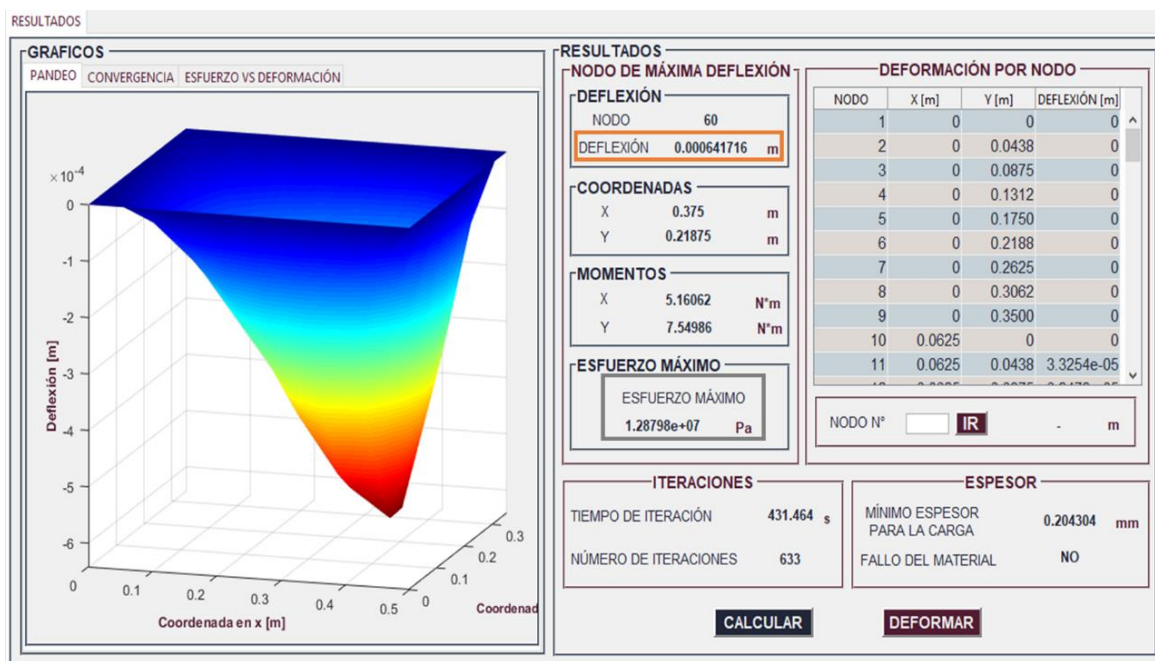


Figura 35 Resultados del caso de carga puntual

Una vez ejecutada la aplicación fueron obtenidos, entre otros resultados, la deformación máxima, tanto en el panel de gráficos del módulo de resultados de ARCUM como en la interfaz de ANSYS, mostrada en la Figura 36, exponiendo también el valor numérico de la deflexión resaltado en la Figura 35 con el recuadro naranja.

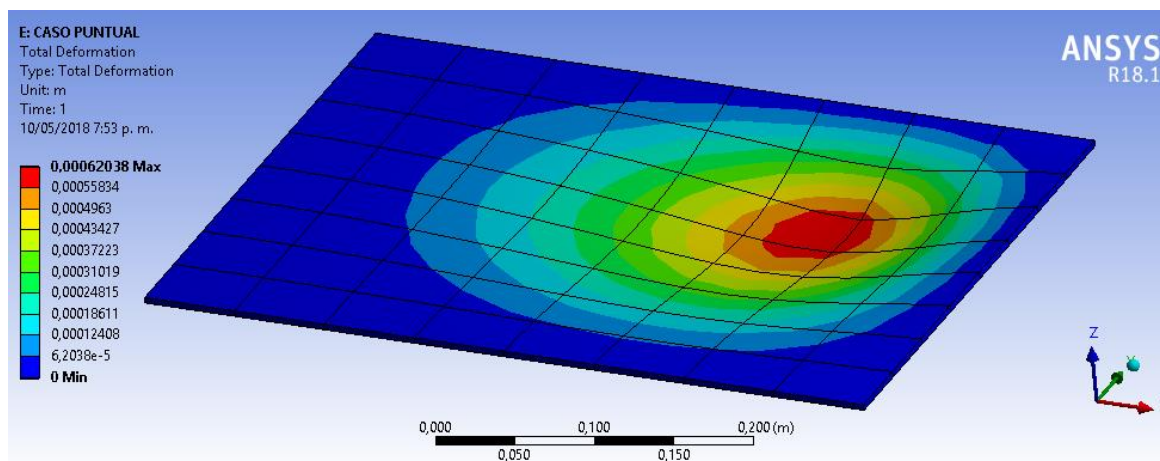


Figura 36 Deformación de la placa del caso de carga puntual en ANSYS

Los datos de deformación y esfuerzo normal máximo de la placa son mostrados en la Tabla 7, en donde el porcentaje de error entre ambas variables es aproximadamente igual, siendo este de 3.5 %; y estando ambos resultados de ARCUM por encima de los arrojados por ANSYS.

Tabla 7 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga puntual

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Esfuerzo [MPa]	1,236e+07	1,280e+07	3,57%
Deformación [m]	0,00062038	0,00064170	3,44%

5.1.2. Caso de carga distribuida

Para la validación del caso de carga distribuida sobre la placa, se buscó diseñar una placa tipo sándwich, cuya piel fuese un laminado compuesto por 10 láminas de fibra de Kevlar y resina epóxica dispuestas en una configuración $[90, 60, 45, 30, 0]_S$ y su material de núcleo, como se dijo a lo largo del documento, fuese espuma de poliuretano.

Para lo anterior y, como se muestra en la Figura 37, se utilizó el tercer caso de diseño, definiendo una fracción volumétrica de la fibra $V_f = 0.5$ en ARCUM y un espesor

de lámina de 0.3 milímetros lámina, obteniéndose las propiedades resaltadas con el recuadro rojo las cuales, de igual manera al caso de carga anterior, fueron validadas a partir de la bibliografía consultada (Gay, Hoa, & Tsai, 2003) y organizadas en la Tabla 8.

LAMINA | LAMINADO Y SANDWICH

SELECCIÓN DE MATERIAL

FIBRA

VIDRIO

CARBONO

KEVLAR

MATRIZ

POLIAMIDA

EPÓXICA

POLIESTER

CARACTERÍSTICAS DE LA LÁMINA

ESPESOR mm

MATERIALES

PROPIEDADES MECÁNICAS	FIBRA	MATRIZ
FRACCIÓN VOLMÉTRICA	0.5	0.5
MÓDULO DE ELASTICIDAD	7.03e+10 Pa	4.5e+09 Pa
GRAVEDAD ESPECÍFICA	1.44 kg/m ³	1.2 kg/m ³
RELACIÓN DE POISSON	0.35	0.4
DENSIDAD	1440	1200
FRACCIÓN MÁSCICA	0.545455	0.454545

LÁMINA SIN ORIENTACIÓN

MÓDULO LONGITUDINAL 2.10949e+10 Pa

MÓDULO TRANSVERSAL 2.10949e+10 Pa

DENSIDAD 1320 kg/m³

RELACIÓN MAYOR DE POISSON 0.154937

RELACIÓN MENOR DE POISSON 0.154937

CALCULAR

ORIENTACIÓN

MÓDULO LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL | MÓDULO CORTANTE | RELACIÓN DE POISSON

Módulo Longitudinal y Transversal de la Lámina vs Ángulo de Orientación

LÁMINA FINAL

MÓDULO LONGITUDINAL - Pa

MÓDULO TRANSVERSAL - Pa

MÓDULO CORTANTE - Pa

RELACIÓN MAYOR DE POISSON -

ÁNGULO DE ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS ° **VER PROPIEDADES**

F: CASO DISTRIBUIDA - Mechanical | ANSYS Mechanical

Figura 37 Diseño de lámina del caso de carga distribuida

Tabla 8 Comparación de constantes elásticas del caso de carga distribuida.

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Módulo de elasticidad [MPa]	2,20e+10	2,11e+10	4,1%
Módulo cortante [MPa]	4,00e+09	3,78e+09	5%
Relación de Poisson	0,15	0,154	3,3%

A partir de esta comparación se determinó un error de 4.1%, 5% y 3.3% para los módulos de elasticidad, cortante y relación de Poisson, respectivamente, evidenciando que el único valor por encima del real, a diferencia del caso de carga puntual, fue el de esta última variable.

De manera similar al caso anterior, se diseñó el laminado simétrico de acuerdo con el código y el número de láminas definido anteriormente, obteniéndose tanto el espesor del laminado equivalente a 3 milímetros y resaltado con el recuadro azul de la Figura 38, como las propiedades de la piel del sándwich resaltadas en el recuadro rojo de la misma Figura.

LÁMINA LAMINADO Y SÁNDWICH

LÁMINAS Y NÚCLEO

CONFIGURACIÓN DE LAS CAPAS

NÚMERO DE LÁMINAS: 10 IR

ESPOSOR TOTAL DEL LAMINADO: 3 mm

CALCULAR PROPIEDADES

N°	ÁNGULO [°]
1	90
2	60
3	45
4	30
5	0

PROPIEDADES DE LAS CAPAS

N°	1	2	3
MÓDULO LONGITUDINAL	2.1095e+10	1.1260e+10	9.7458e+09
MÓDULO TRANSVERSAL	2.1095e+10	1.1260e+10	9.7458e+09
MÓDULO CORTANTE	3.0274e+09	6.0715e+09	9.1325e+09
RELACIÓN DE POISSON	0.1549	0.5489	0.6096

PROPIEDADES DEL LAMINADO

MÓDULO LONGITUDINAL: 1.60554e+10 Pa MÓDULO CORTANTE: 6.07996e+09 Pa

MÓDULO TRANSVERSAL: 1.60554e+10 Pa RELACIÓN MAYOR DE POISSON: 0.367428

VISTA PREVIA DEL LAMINADO

Figura 38 Diseño de laminado del caso de carga distribuida

Se debe recordar que al ser mucho mayor el módulo elástico del compuesto al del material del núcleo, son estas propiedades las utilizadas para aproximar el comportamiento bajo la carga a la que sería sometida la placa, es decir, las ingresadas a ANSYS para determinar los valores de deformación y esfuerzo máximos.

Posterior a ello, se modeló la placa asignando tanto las dimensiones de esta, como el espesor del núcleo, siendo estas 20x40 centímetros y 4 milímetros respectivamente; obteniéndose un espesor total de la lámina de 14 milímetros, como se observa en el recuadro verde de la Figura 39.

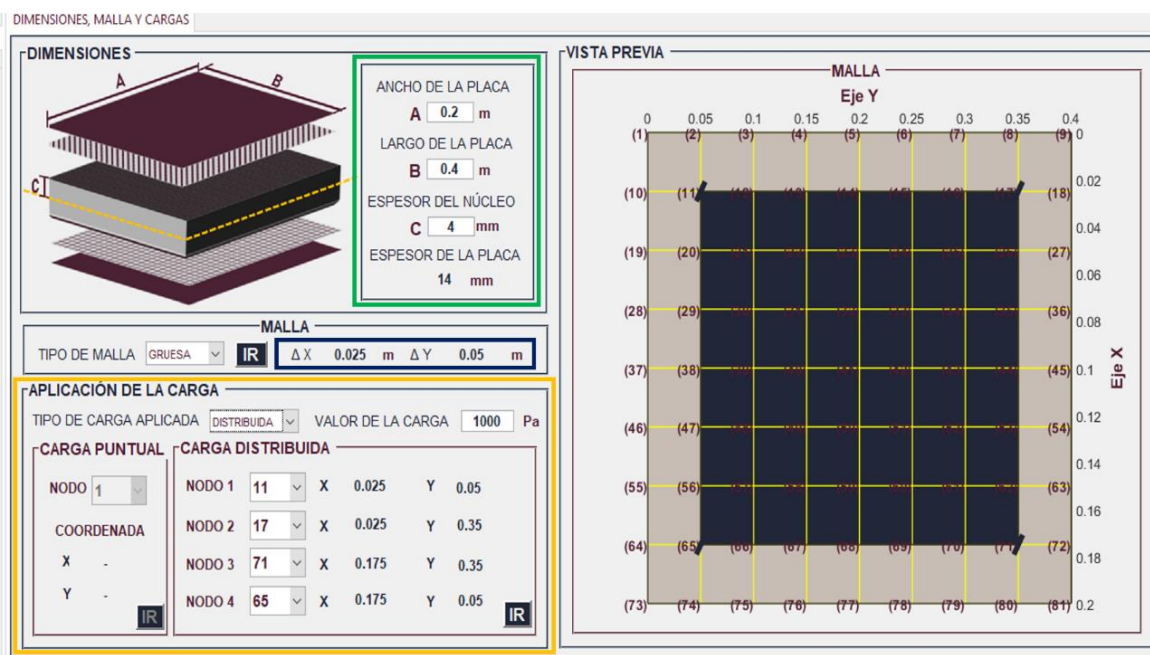


Figura 39 Modelado de la placa del caso de carga distribuida

Adicionalmente y, contando con una malla gruesa, se definió la zona de aplicación de la carga como se muestra en el recuadro amarillo y en el panel de vista previa del enmallado de esta última Figura, en donde se debe resaltar que la delimitación de esta zona de aplicación para este caso de carga se debe realizar seleccionando las esquinas internas siguiendo el esquema de la Figura 25, debido a que los bordes externos, como se dijo a lo largo del documento, poseen una deformación igual a cero.

Una vez calculada la solución, con la carga distribuida asignada equivalente a $P=1000$ Pascales, el módulo de resultados proporciona la información de la deformación y el esfuerzo normal máximo obtenido, los cuales se encuentran localizados en el nodo central de la placa y son resaltados por los recuadros naranja y gris en la Figura 40, respectivamente.

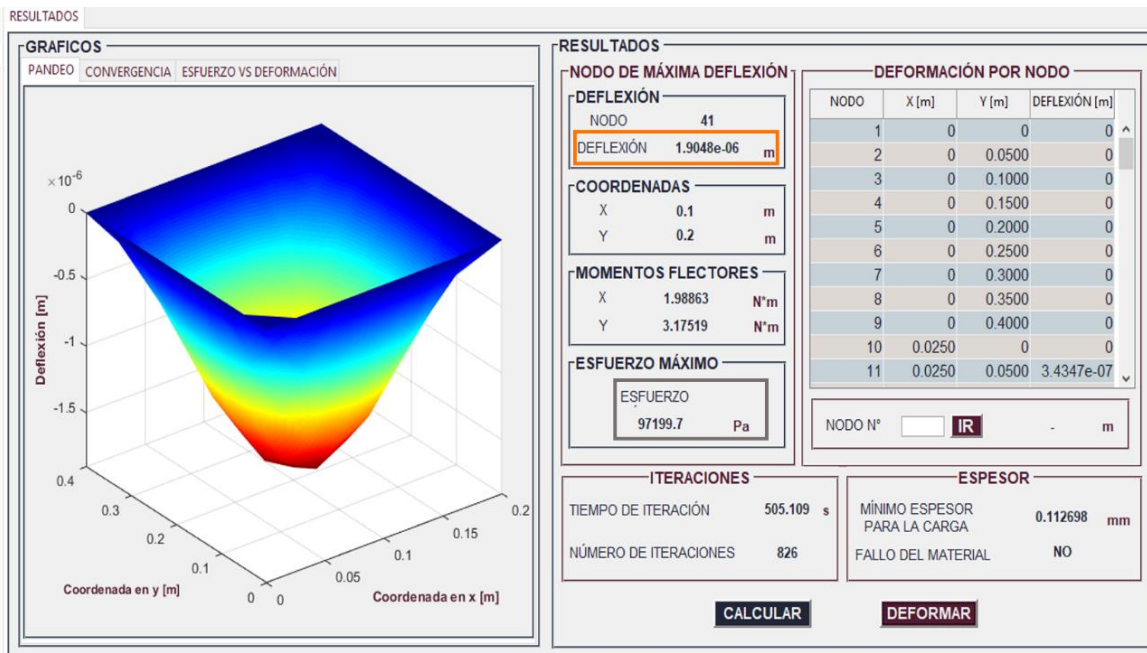


Figura 40 Resultados del caso de carga distribuida

Estos datos son comparados con los obtenidos por medio del análisis estructural de la placa realizado en ANSYS, donde los resultados gráficos y numéricos de deformación son mostrados en la Figura 41.

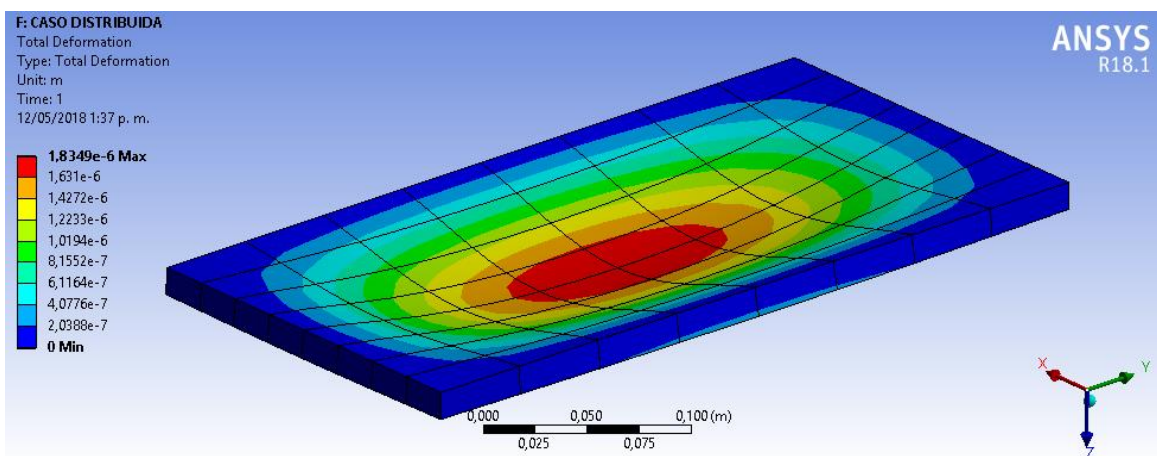


Figura 41 Deformación de la placa del caso de carga distribuida en ANSYS

En la Tabla 9 se realiza la comparación de esfuerzos y deformaciones determinando un error del 2.91% y 3.54% respectivamente, evidenciando que el resultado de la

deformación arrojado por ARCUM es el único valor que se encuentra por encima del real, a diferencia del caso de carga puntual.

Tabla 9 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga distribuida

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Esfuerzo [MPa]	1,002e+05	9,727e+04	2,91%
Deformación [m]	1,83500e-06	1,90480e-06	3,54%

5.1.3. Caso de carga parcialmente distribuida

Para el caso de una carga parcialmente distribuida sobre un área determinada de la placa se realizó el mismo procedimiento de los casos anteriores, diseñando una lámina de fibra de carbono y resina epóxica.

The screenshot shows the 'LAMINA' software interface. It is divided into several sections:

- SELECCIÓN DE MATERIAL:** Includes 'FIBRA' (Carbono selected) and 'MATRIZ' (Epóxica selected).
- PROPIEDADES MECÁNICAS:** A table of material properties for both fiber and matrix.
- LÁMINA SIN ORIENTACIÓN (highlighted in red):** Displays the following properties:

MÓDULO LONGITUDINAL	5.56623e+10 Pa
MÓDULO TRANSVERSAL	5.56623e+10 Pa
DENSIDAD	1447.5 kg/m ³
RELACIÓN MAYOR DE POISSON	0.0537962
RELACIÓN MENOR DE POISSON	0.0537962
- ORIENTACIÓN:** Includes a graph of 'Módulo Longitudinal y Transversal de la Lámina vs Ángulo de Orientación' and a 'SELECCIONAR ÁNGULO' button set to 0°.

Figura 42 Diseño de lámina del caso de carga parcialmente distribuida.

Como se observa en la Figura 42, el recuadro rojo indica las constantes elásticas en el módulo de diseño de lámina del primer caso de diseño, las cuales surgen de una fracción

volumétrica de la fibra $V_f = 0.45$ y cuyos resultados son contrastados con los de referencia (Gay, Hoa, & Tsai, 2003), determinando el error como en los casos anteriores, en la Tabla 10, donde se evidencia que el error máximo encontrado es de 2,96% y el único valor que se encuentra por encima de los proporcionados por la bibliografía es el del módulo de elasticidad.

Tabla 10 Comparación de constantes elásticas del caso de carga parcialmente distribuida.

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Módulo de elasticidad [MPa]	5,40e+10	5,56e+10	2,96%
Módulo cortante [MPa]	4,00e+09	3,89e+09	2,80%
Relación de Poisson	0,05	0,05	0,0%

Por otro lado, la zona de aplicación de la carga distribuida de $P=30$ Pascales, para este caso, equivale a la mitad de la placa como se observa en la Figura 43, en el panel de vista previa y la delimitación de esta zona de aplicación se da a partir del esquema de la Figura 25, al igual que el caso de carga anterior, partiendo de las esquinas internas superiores hasta la mitad de la placa, integrando los nodos 11, 17, 44 y 38.

También fueron definidas las dimensiones de la placa, contando con 0.3 y 0.1 milímetros de ancho y largo respectivamente, resaltadas con el recuadro verde de esta Figura, contando con un espesor de 2.4 milímetros ingresado en el módulo de diseño del compuesto.

Finalmente, los valores de deflexión y esfuerzo normal máximos arrojados por ARCUM son visualizados en el módulo de resultados resaltados con los recuadros naranja y gris, respectivamente, así como la gráfica de pandeo es visualizada en el panel de gráficos de la Figura 44.

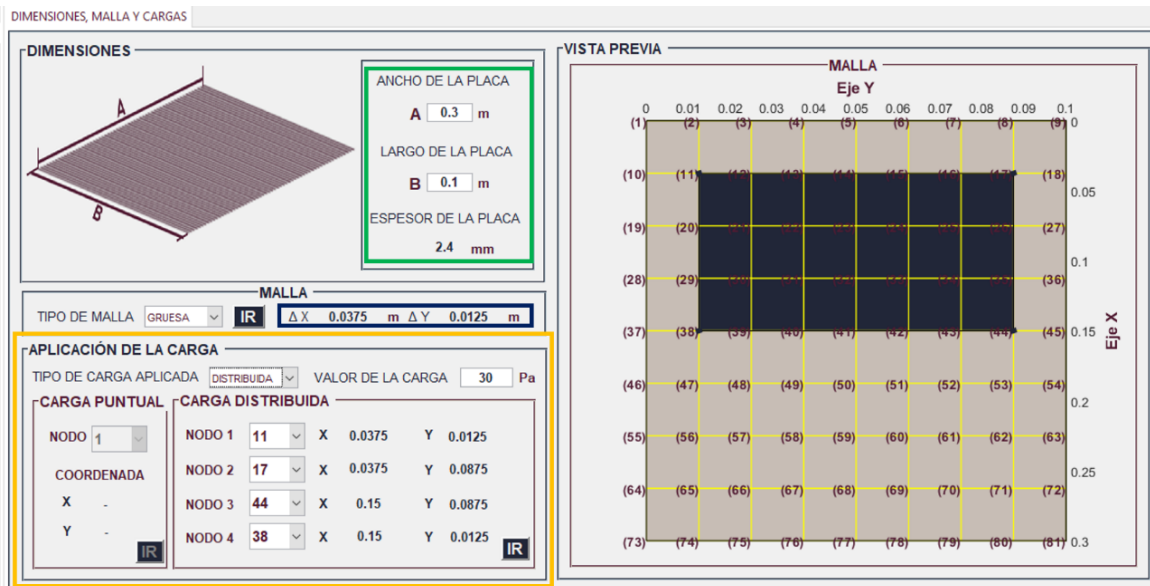


Figura 43 Modelado de la placa del caso de carga parcialmente distribuida

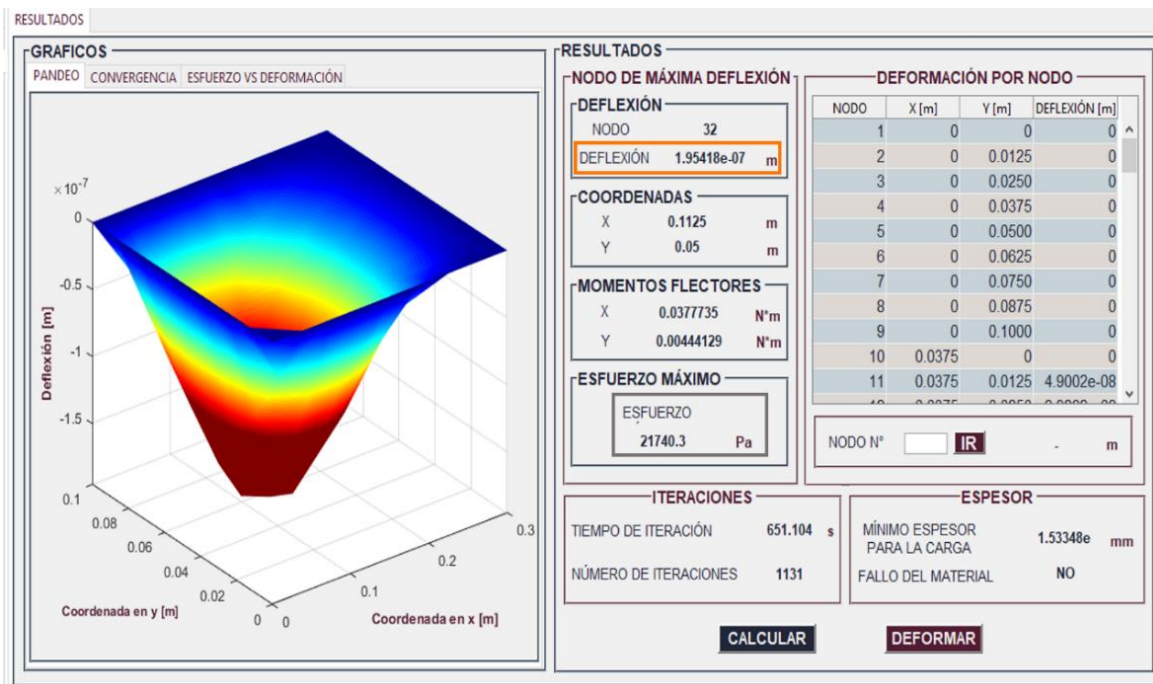


Figura 44 Resultados del caso de carga parcialmente distribuida

Estos datos fueron comparados, como en los casos anteriores, con el análisis realizado en ANSYS, cuyos resultados de deformación son expuestos en la Figura 45 y comparados con los obtenidos con ARCUM en la Tabla 11, determinando el porcentaje de

error, el cual para los dos casos fue equivalente al 5%, encontrándose ambos resultados por debajo de los valores reales obtenidos por el software de validación.

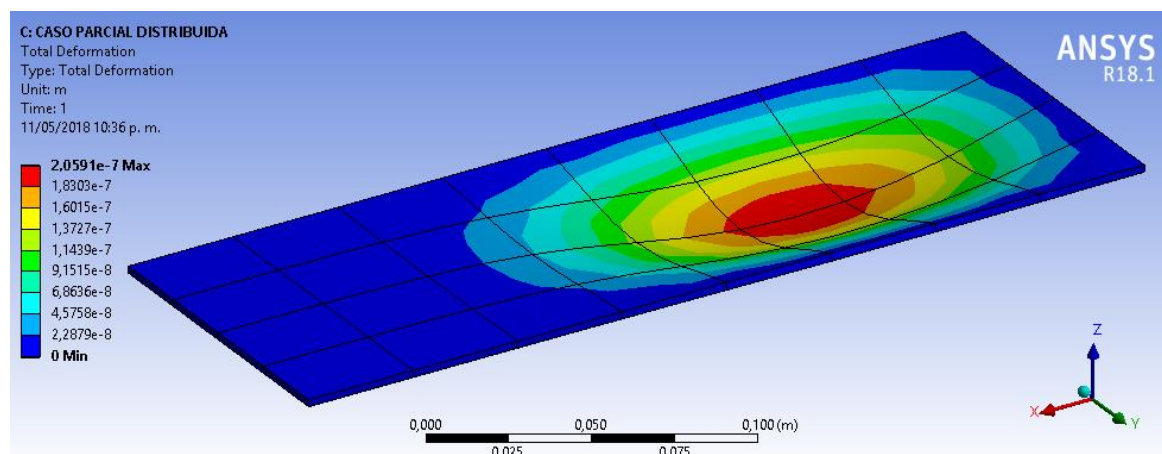


Figura 45 Deformación de la placa del caso de carga parcialmente distribuida en ANSYS

Tabla 11 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de carga parcialmente distribuida

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Esfuerzo [MPa]	2,289e+04	2,174e+04	5,00%
Deformación [m]	0,00000020591	0,0000001954	5,00%

5.2. Verificación de casos de la bibliografía

Para realizar la segunda parte de la validación de resultados se utiliza el módulo de caso ARCUM, con el fin de proporcionar las entradas correspondientes a los documentos seleccionados y determinar el error entre las deformaciones y esfuerzos máximos.

5.2.1. Universidad de San Buenaventura Sede Bogotá

En primer lugar, es evaluado el documento elaborado por (Luna Amezcuita & Navas Mantilla, 2016) en su trabajo de grado, cuyo análisis de pandeo de una placa de material compuesto por Kevlar y resina epóxica es realizado de manera manual por el mismo método utilizado en el código computacional de ARCUM, es decir, el método de diferencias finitas. Las propiedades de entrada de la placa fueron obtenidas a partir de la caracterización de probetas e ingresadas a la aplicación como se evidencia en la Figura 46 en el recuadro rojo y, adicionalmente, las dimensiones utilizadas para dicho análisis son resaltadas en el recuadro verde de esta misma Figura.

Por otro lado, la carga a la cual se encuentra sometida la placa es de tipo puntual, localizada en el nodo 41, es decir en el medio de esta y con un valor de 302.48 Newtons, para este caso de evaluación.



Figura 46 Modelado de la placa del caso de la Universidad de San Buenaventura

La Figura 47 muestra el esquema realizado por los autores, en donde se localizan tanto los valores numéricos como las convenciones de colores que indican la mayor deformación en el centro, señalada con rojo y la menor, en los bordes señalada con verde; evidenciándose un valor máximo de deflexión de $W_{max} = 0,024911787$ milímetros.

GRAFICA DEFORMACION PLACA [mm]									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,001971659	0,004292886	0,006985348	0,008466104	0,006985348	0,004292886	0,001971659	0	0
0	0,003641911	0,007920534	0,012836997	0,016068262	0,012836997	0,007920534	0,003641911	0	0
0	0,004760868	0,010370499	0,016941196	0,021994933	0,016941196	0,010370499	0,004760868	0	0
0	0,005155575	0,011247487	0,018518901	0,024911787	0,018518901	0,011247487	0,005155575	0	0
0	0,004760868	0,010370499	0,016941196	0,021994933	0,016941196	0,010370499	0,004760868	0	0
0	0,003641911	0,007920534	0,012836997	0,016068262	0,012836997	0,007920534	0,003641911	0	0
0	0,001971659	0,004292886	0,006985348	0,008466104	0,006985348	0,004292886	0,001971659	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 47 Resultados de deformación obtenidos en el estudio de la Universidad de San Buenaventura (Luna Amezquita & Navas Mantilla, 2016)

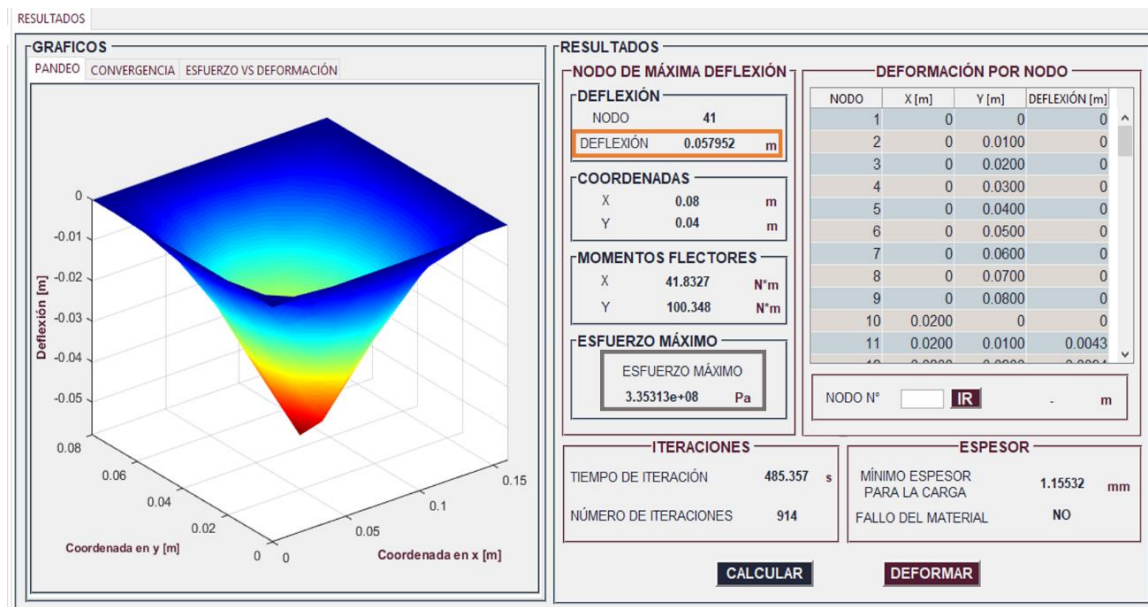


Figura 48 Resultados del caso de la Universidad de San Buenaventura en ARCCUM

Por su parte, los resultados obtenidos por ARCCUM, muestran una deflexión de 0,057952 metros por lo que se realizan las comparaciones correspondientes a partir del dato de deformación máxima proporcionado por el análisis realizado en ANSYS bajo el

protocolo de simulación dado por el Anexo 5 que, como se muestra en la Figura 49, es de 0,06117 metros.

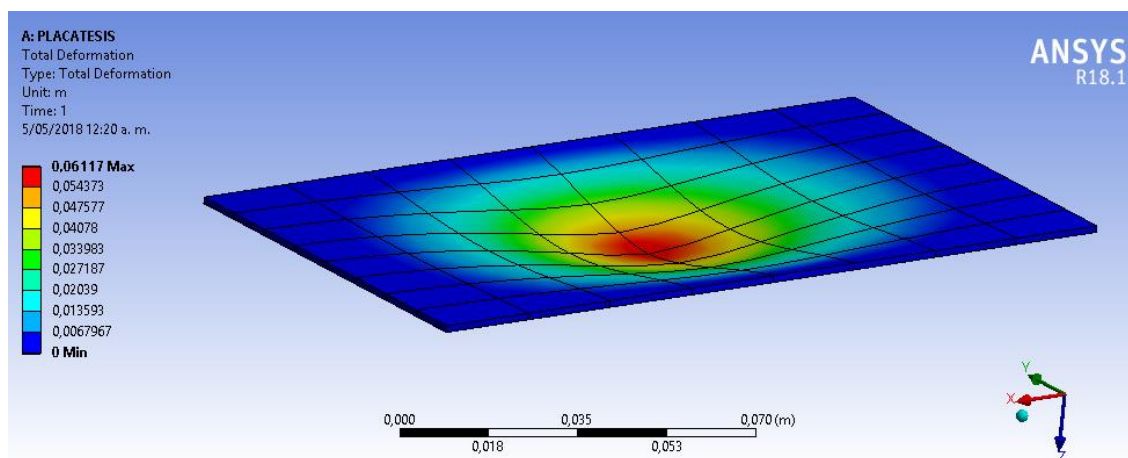


Figura 49 Deformación de la placa del caso de la Universidad de San Buenaventura en ANSYS.

Partiendo de lo anterior se determina el error porcentual entre el valor de ANSYS y el obtenido por cada uno de los análisis realizados, tanto por los autores de la Universidad de San Buenaventura (Luna Amezcua & Navas Mantilla, 2016), como el desarrollado obtenido en el presente proyecto.

Para el primer caso, el error entre el ANSYS y el análisis manual realizado por los autores es de 99.096%, mientras que, para el segundo caso, es decir el error entre ANSYS y ARCUM, es de 3.87%. Adicionalmente, se determina el error entre los esfuerzos calculados por ANSYS y ARCUM, obteniendo un valor del 1.68% y siendo mostrado en la Tabla 12.

Tabla 12 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de la de la Universidad de San Buenaventura

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Error porcentual
Esfuerzo [MPa]	3,360e+08	3,30e+08	1,68%
Deformación [m]	0,06117	0,057952	3,87%

5.2.2. Universidad Carlos III de Madrid

Para el segundo caso de validación bibliográfica, se parte del análisis realizado por los autores (Ortega & González López, 2013), en donde se evalúa la deformación de placas con distintas propiedades y dimensiones, a partir de distintos métodos numéricos de resolución, incluyendo el método de diferencias y elementos finitos y el método de Navier.

Este análisis seleccionado parte de las características del material resaltadas en el recuadro rojo de la Figura 50, de las dimensiones de la placa resaltadas en el recuadro verde de la misma Figura y de una carga de $P=10000$ Pascales distribuida sobre toda la superficie, cuya zona de aplicación es delimitada en el recuadro amarillo del módulo de modelado de la placa de ARCUM.

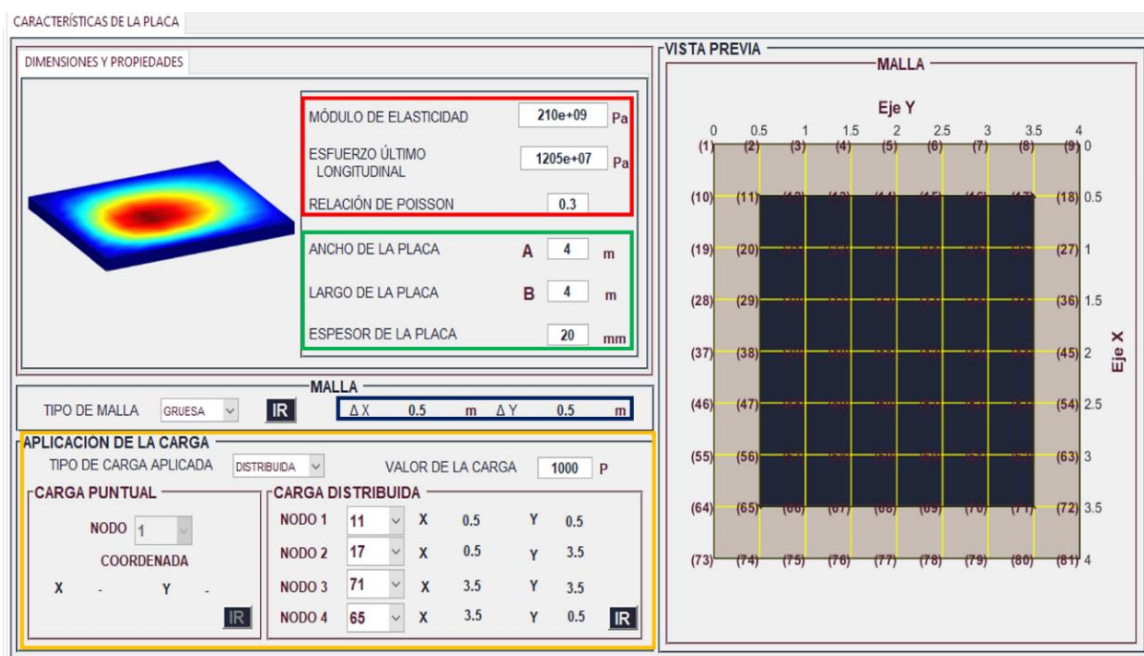


Figura 50 Modelado de la placa del caso de la Universidad Carlos III de Madrid

La ejecución de este caso de estudio por parte de los autores de la Universidad Carlos III de Madrid, determinó un valor de deflexión máxima mostrado en la Tabla 13, de 3.379×10^{-3} metros mientras que el valor máximo de deflexión proporcionado por

ARCUM, el cual es resaltado en el recuadro naranja de la Figura 51, es de 3.373×10^{-3} metros.

De igual manera al caso anterior, se realiza el análisis de deformación en ANSYS bajo el protocolo de simulación dado por el Anexo 5, con el fin de proporcionar un valor real de comparación; del cual se obtienen los resultados ilustrados en la Figura 52 y contrastados en la Tabla 13.

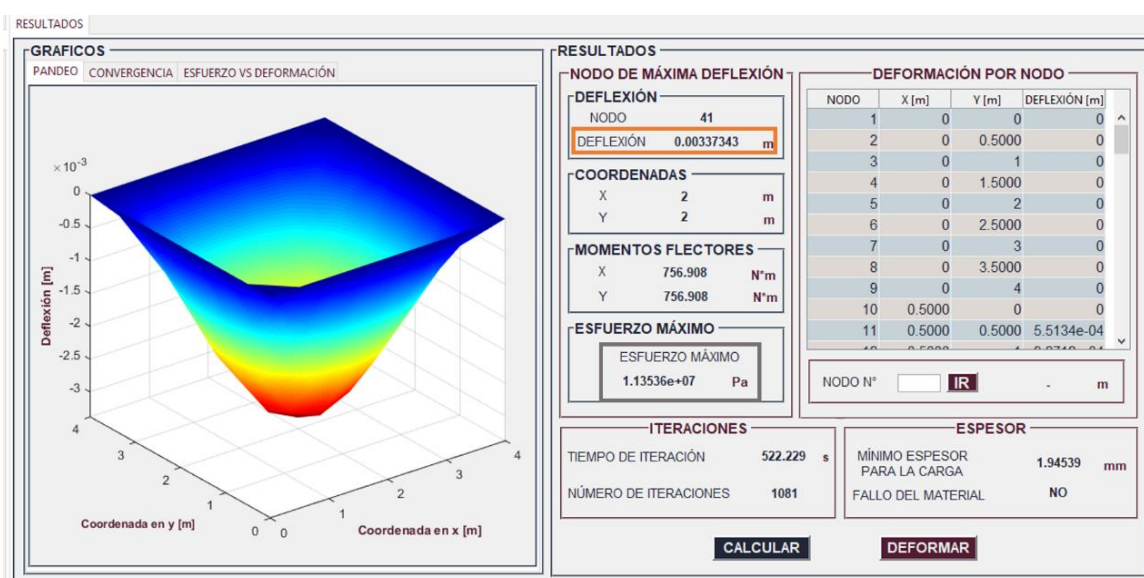


Figura 51 Resultados del caso de la Universidad Carlos III de Madrid

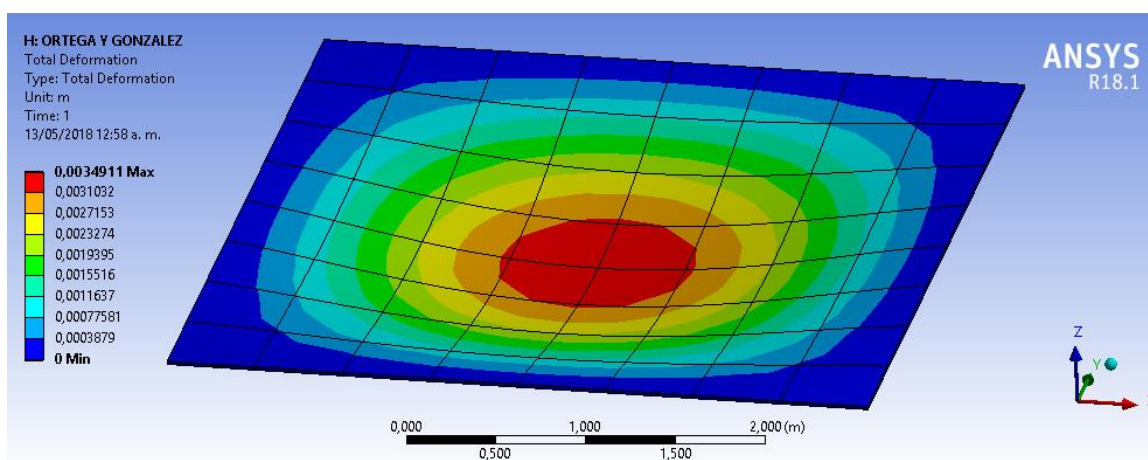


Figura 52 Deformación de la placa del caso de la Universidad Carlos III de Madrid en ANSYS

Tabla 13 Comparación de esfuerzos y deformaciones del caso de la de la Universidad Carlos III de Madrid

Característica	Resultados de referencia	Resultados ARCUM	Universidad Carlos III de Madrid	Error porcentual
Esfuerzo [MPa]	1,071e+07	3,491e-03	-	5,05%
Deformación [m]	1,135e+07	3,373e-03	3,37900e-03	3,37%

A partir de estos valores se calculó el porcentaje de error entre ANSYS y el análisis realizado por los autores, el cual fue de 3,21%, mientras que el calculado entre ANSYS y ARCUM fue de 3,37%, teniendo el primero de estos un 0,16% más de exactitud que el segundo; estando ambos resultados por debajo al valor real.

Adicionalmente se calculó el porcentaje de error entre el valor máximo del esfuerzo normal obtenido por medio de ANSYS y el obtenido a partir de ARCUM, siendo este de 5.05%, siendo el valor máximo de error de todas las pruebas realizadas y estando por encima del valor real obtenido. Se debe destacar también que aunque en la sección 1.5.2. del presente proyecto fueron estipuladas las longitudes máximas permisibles para el ancho y largo de una placa, equivalente a 500 milímetros; el exceder esta restricción no tiene afectaciones significativas en los resultados de esfuerzo o deformación, ya que se encuentra exclusivamente relacionado con las dimensiones utilizadas frecuentemente en los proyectos de investigación y prácticas experimentales; por esto, ARCUM soluciona los casos cuyas dimensiones se encuentren fuera de este intervalo propuesto.

7. Conclusiones

El desarrollo del proyecto ARCUM permitió confirmar la proximidad entre los resultados calculados por el código computacional y los valores de referencia, por medio del método de diferencias finitas para determinar los esfuerzos y deformaciones, respetando el límite de error estipulado al no obtenerse errores entre resultados mayores al 5% y encontrándose que, en promedio, el error existente entre los valores reales y los obtenidos por ARCUM para las deformaciones máximas es de 4.13%, mientras que para los esfuerzos máximos es de 3.88%, indicando una mayor exactitud en estos últimos.

La validación desarrollada en la sección 5.2, referente al análisis de pandeo realizado manualmente en la Universidad de San Buenaventura Sede Bogotá, permitió confirmar la necesidad de proporcionar, principalmente a los estudiantes, una herramienta de cálculo que facilite la ejecución de análisis que requieren la inclusión de métodos iterativos, como lo es el análisis de deformación por medio del método de diferencias finitas, debido a que al ser ejecutado manualmente los resultados se encuentran sujetos a errores durante el proceso de solución extenso que además requiere una inversión de tiempo considerable para ser resueltos; sin embargo, el modelo utilizado por los autores (Luna Amezcuita & Navas Mantilla, 2016), que se encontraba basado en el propuesto por el autor (Peery & Azar, 1982) y en donde se proporciona directamente la ecuación general abreviada, posee errores de simplificación de los coeficientes F_1 , F_2 , F_3 , F_4 y F_5 , determinando erróneamente los resultados de deformación y, por ende, de momentos flectores, esfuerzos máximos, gráficas de esfuerzo contra deformación y espesor mínimo para soportar la carga.

En la comparación realizada entre las propiedades mecánicas calculadas por ARCUM y las de referencia tomadas de la bibliografía (Gay, Hoa, & Tsai, 2003), se evidenció que el módulo

de Young es la variable en la se presenta un mayor error, mientras que la relación de Poisson posee el menor error dentro de los parámetros comparados. Asimismo, los resultados de esfuerzo y deformación máximos tienden a estar por debajo del valor real, indicando una posible visualización de falla antes de tiempo, evitando utilizar materiales que se encuentren al límite de su resistencia.

Se identificó que el caso de carga que invierte menos tiempo en determinar el vector deformación es el de carga puntual, utilizando entre 431 y 485 segundos que equivalen a 7,1 y 8 minutos respectivamente, a diferencia del caso de carga distribuida en donde la inversión de tiempo se encuentra en un intervalo de 505 y 522 segundos, que equivalen a 8,4 y 8,7 minutos respectivamente.

Por último, al desarrollar la herramienta ejecutable de ARCUM a partir del compilador de Matlab, su tamaño total fue equivalente a 2.84 GB mientras que los archivos ejecutados desde el editor de Matlab contaron con un tamaño de 1.46 GB; de lo que se pudo concluir que el gran tamaño de ARCUM se encuentra dado por el uso de malas prácticas de programación, dado que las líneas del código computacional no fueron re utilizadas como funciones adaptables a las necesidades en las operaciones, sino repetidas dos o más veces conforme se fuesen requiriendo. Adicionalmente, los parámetros que no variaron en el tiempo fueron definidos como variables, mas no como constantes iniciales, provocando un mayor uso de memoria y CPU.

8. Recomendaciones

Se recomienda mejorar esta primera versión de ARCUM, incluyendo cambios para reducir el tiempo de iteración y mejorar la precisión de los resultados; así como la inclusión tanto de variables y conceptos adicionales, tales como el cálculo del número mínimo de láminas que deben componer un laminado y la predicción del código de orientación ideal para soportar una determinada carga aplicada; así como también la inclusión de fibras adicionales como la de boro y una mayor cantidad de materiales compuestos, logrando abarcar no solo los de matriz polimérica sino los de matriz cerámica o metálica.

También se sugiere modificar la gráfica de convergencia, de tal manera que represente en tiempo real el comportamiento por iteración en el modelo que se esté resolviendo. Adicionalmente se recomienda la inclusión de otras condiciones de frontera, como bordes simplemente apoyados y bordes libres, ampliando el campo de acción de la aplicación.

Por último, se sugiere optimizar el código en Matlab orientando la programación a los requerimientos tanto funcionales como no funcionales de la aplicación, implementando buenas prácticas de programación, como la programación estructurada para evitar las líneas repetidas de código y el planteamiento de constantes iniciales, para disminuir el uso de memoria y tamaño de la aplicación y agilizar la ejecución de las operaciones matemáticas ejecutadas.

9. Anexos

Anexo 1 - Código computacional de ARCUM

Anexo 2 - Guía de usuario de ARCUM

Anexo 3 - Entradas y salidas de cada caso de diseño en ARCUM

Anexo 4 - ARCUM ejecutable

Anexo 5 – Protocolos de simulación en ANSYS

Bibliografía

- Aircraft Spruce & Specialty Co. (2018). *Aircraft pruce - Bidirectional woven fiber*. Retrieved from <http://www.aircraftspruce.com/search/search.php?s=bidirectional&x=0&y=0>
- Alvarado Prieto, P. R. (2014). *MECHANICAL PROPERTIES CHARACTERIZATION OF ADVANCED COMPOSITE MATERIALS, A REVIEW*. Bogotá D.C.: Colombian Air Force Graduate School.
- ANSYS. (2018). *ANSYS Mechanical Enterprise: Mechanical Engineering Software*. Retrieved from <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-mechanical-enterprise>
- ARTLUX EUROPA. (2018). *Hoja técnica espuma de poliuretano*. Retrieved from <https://www.acebyartcoat.com/espumas-de-poliuretano>
- Balogh, B. (2013). *COMPUTER PROGRAM FOR THE CALCULATION OF MINDLIN PLATES*. Budapest, Hungary: BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS.
- Barton, M. V. (1948). Finite Difference Equations for the Analysis of Thin Rectangular Plates with Combinations of Fixed and Free Edges. *Defense research laboratory-The University of Texas*.
- Buragohain, M. K. (2017). *Composite Structures: Design, Mechanics, Analysis, Manufacturing, and Testing*. New York: Taylor and Francis Group.
- Carrillo Ledesma, A., Mendoza Bernal, O., & González Rosas, K. I. (2018). *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. Ciudad de México, México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Dolicainin, C., Nikolic, V., & Dolicanin, D. (2010). Application of Finite Difference Method to Study of the Phenomenon in the Theory of Thin Plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 29-43.
- Ezeh, J., Ibearugbulem, O., & Onyechere, C. (2013). Pure Bending Analysis of Thin Rectangular Flat Plates Using Ordinary Finite Difference Method. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 20-23.
- Flórez Rodríguez, A. N. (2008). *SOFTWARE APPLICATION FOR SUPPORTING THE DESIGN PROCESS WITH COMPOSITE MATERIALS*. Bogotá D.C., Colombia: Universidad de los Andes.
- Gay, D., Hoa, S. V., & Tsai, S. W. (2003). *Composite materials : design and applications*. New York: Taylor and Francis Group.
- Gryzagoridis, J., Oliver, G., & Findeis, D. (2015). On the equivalent flexural rigidity of sandwich composite panels. *Insight: Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 140-143.

- Heslehurst, R. (2015). Composite Sandwich Design Requirements. *Composites Australia*, 12-13.
- Hollman, M. (1983). *COMPOSITE AIRCRAFT DESIGN*. Monterey.
- Hossain, M. B., Ahmed, T. U., & Roknuzzaman, M. (2017). Application of Finite Difference Method for the Analysis of a Rectangular Thin Plate with Eccentric Opening. *International Conference on Planning, Architecture and Civil Engineering*.
- Hunt, B. R., Lipsman, R. L., & Rosenberg, J. M. (2014). *A Guide to MATLAB: For Beginners and Experienced Users*. Cambridge: Cambridge University.
- International ASTM. (2002). *Designation: D 3039/D 3039M – 00 Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials 1*. Pensilvania.
- Jones, R. M. (1999). *MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS*. Philadelphia: Taylor & Francis, Inc.
- Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of Composite Materials*. New York: Taylor & Francis Group.
- Loughlan, J. (2004). *Thin-walled structures : advances in research, design and manufacturing technology*. New York: Taylor and Francis Group.
- Luna Amezquita, J. S., & Navas Mantilla, M. A. (marzo de 2016). CARACTERIZACIÓN DE UN MATERIAL COMPUESTO QUE ESTA SOMETIDO A IMPACTOS PARA AERONAVES NO TRIPULADAS DE CORTO ALCANCE. Bogotá D.C., Colombia: Universidad de San Buenaventura sede Bogotá.
- Michavila, F., & Gavete, L. (1985). *Programación y cálculo numérico*. Barcelona: Reverté, S.A.
- NetComposites Ltd. (2018). *Composite materials guide: Reinforcements - Woven Fabrics*. Retrieved from <https://netcomposites.com/guide-tools/guide/reinforcements/woven-fabrics/>
- Ortega, M., & González López, S. (2013). CÁLCULO DE PLACAS A TRAVÉS DE DISTINTAS METODOLOGÍAS. Madrid, España: Universidad Carlos III de Madrid.
- Özişik, M. N., Orlande, H. R., Colaço, M. J., & Cotta, R. M. (1994). *Finite difference methods in heat transfer*. Taylor and Francis Group.
- Peery, D. J., & Azar, J. J. (1982). *AIRCRAFT STRUCTURES*. McGraw-Hill Book Company.
- Skiba, Y. N. (2005). *Métodos y esquemas numéricos : un análisis computacional*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Szilard, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis : classical, numerical, and engineering methods*. John Wiley & Sons.
- The MathWorks. (2018). *GUI de MATLAB - MATLAB & Simulink*. Retrieved from <https://la.mathworks.com/discovery/matlab-gui.html>

- Thomsen, O. T., Bozhevolnaya, E., & Lyckegaard, A. (2005). *Sandwich structures 7 : advancing with sandwich structures and materials* . Netherlands: Springer Publishing.
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Totter, E., Raichman, S., & Mirasso, A. (2015). APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS A LA DETERMINACIÓN DE CARGAS CRÍTICAS DE INESTABILIDAD POR CORTE DE PLACAS DELGADAS. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - MACI*, 163-166.